Rubio de Francia-ren funtzio karratua

Mikel Flórez Amatriain

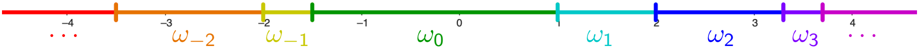
Matematikari Euskaldunen VI. Topaketak

Eibar, 2024ko ekainaren 17a

Rubio de Francia-ren funtzio karratua

Izan bedi $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tarte disjuntuen bilduma bat.

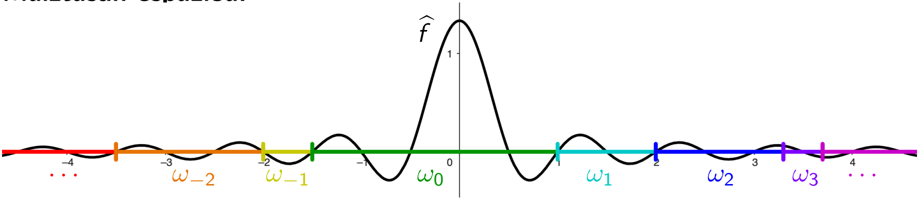
Maiztasun espazioa:



Rubio de Francia-ren funtzio karratua

Izan bedi $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tarte disjuntuen bilduma bat.

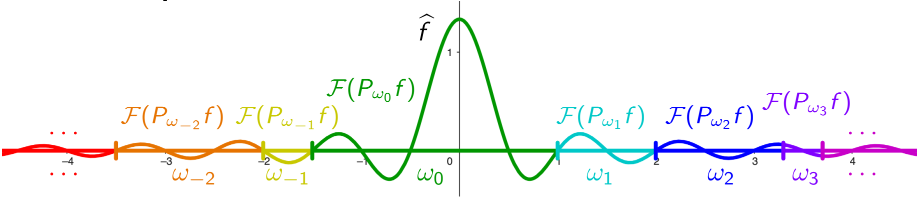
Maiztasun espazioa:



Rubio de Francia-ren funtzio karratua

Izan bedi $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tarte disjuntuen bilduma bat.

Maiztasun espazioa:



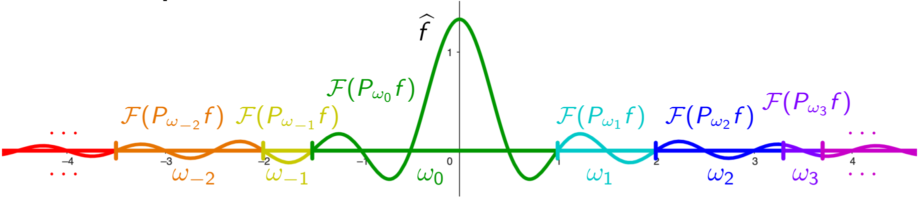
Maiztasun proiekzioa:

$$\mathcal{F}\left(P_{\omega_k}f\right)(\xi) := \mathbb{1}_{\omega_k}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Rubio de Francia-ren funtzio karratua

Izan bedi $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tarte disjuntuen bilduma bat.

Maiztasun espazioa:



Maiztasun proiekzioa:

$$\mathcal{F}\left(P_{\omega_k}f\right)(\xi) \coloneqq \mathbb{1}_{\omega_k}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

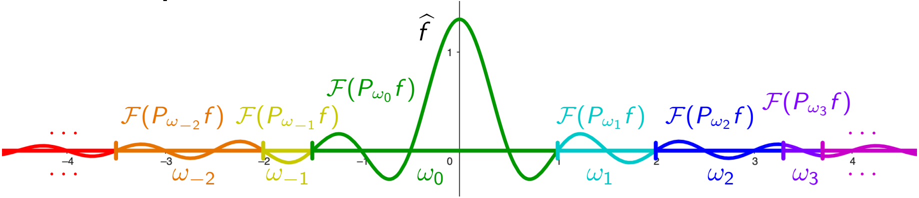
Rubio de Francia-ren funtzio karratua:

$$Tf(x) \coloneqq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|P_{\omega_k}f(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Rubio de Francia-ren funtzio karratua

Izan bedi $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tarte disjuntuen bilduma bat.

Maiztasun espazioa:



Maiztasun proiekzioa:

$$\mathcal{F}\left(P_{\omega_k}f\right)(\xi) := \mathbb{1}_{\omega_k}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Rubio de Francia-ren funtzio karratua:

$$Tf(x) := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|P_{\omega_k}f(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema (J. L. Rubio de Francia, 1985)

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \qquad 2 \leq p < \infty.$$

Sparse bilduma

Definizioa

Izan bitez $\mathcal{S}$ tarteen bilduma bat eta $0 < \eta < 1$. Esaten dugu $\mathcal{S}$ η-*sparse* dela, edozein $I \in \mathcal{S}$ tarterako existitzen bada $E_I \subseteq I$ azpimultzo bat non

- $|E_I| \geq \eta |I|$,
- $\{E_I : I \in \mathcal{S}\}$ binaka disjuntuak.

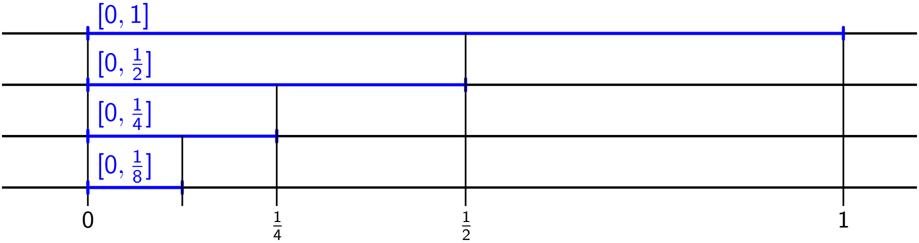
Sparse bilduma

Definizioa

Izan bitez $\mathcal{S}$ tarteen bilduma bat eta $0 < \eta < 1$. Esaten dugu $\mathcal{S}$ η-*sparse* dela, edozein $I \in \mathcal{S}$ tarterako existitzen bada $E_I \subseteq I$ azpimultzo bat non

- $|E_I| \geq \eta |I|$,
- $\{E_I : I \in \mathcal{S}\}$ binaka disjuntuak.

Adibidea: $\mathcal{S} = \{[0, 2^{-k}]\}_{k=0}^{\infty}$



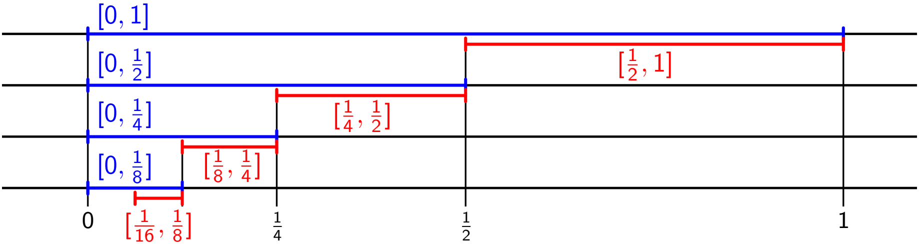
Sparse bilduma

Definizioa

Izan bitez $\mathcal{S}$ tarteen bilduma bat eta $0 < \eta < 1$. Esaten dugu $\mathcal{S}$ η-*sparse* dela, edozein $I \in \mathcal{S}$ tarterako existitzen bada $E_I \subseteq I$ azpimultzo bat non

- $|E_I| \geq \eta |I|$,
- $\{E_I : I \in \mathcal{S}\}$ binaka disjuntuak.

Adibidea: $\mathcal{S} = \{[0, 2^{-k}]\}_{k=0}^{\infty}$ eta $E_{[0,2^{-k}]} = [2^{-k-1}, 2^{-k}]$.



Sparse eragileak

Definizioa

Izan bitez $1 \leq q < \infty$, $\mathcal{S}$ sparse bilduma bat eta $f \in L^2(\mathbb{R})$. Definitzen dugu $T_{q,\mathcal{S}} f$ sparse eragilea

$$T_{q,\mathcal{S}} f(x) := \sum_{I \in \mathcal{S}} \langle f \rangle_{q,I} \mathbb{1}_I(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Goian $\langle f \rangle_{q,I}$ zenbakiak f-ren L^q-batezbestekoa I tartean adierazten du:

$$\langle f \rangle_{q,I} := \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

Sparse eragileak

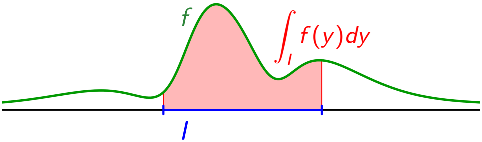
Definizioa

Izan bitez $1 \leq q < \infty$, $\mathcal{S}$ sparse bilduma bat eta $f \in L^2(\mathbb{R})$. Definitzen dugu $T_{q,\mathcal{S}} f$ sparse eragilea

$$T_{q,\mathcal{S}} f(x) := \sum_{I \in \mathcal{S}} \langle f \rangle_{q,I} \mathbb{1}_I(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Goian $\langle f \rangle_{q,I}$ zenbakiak f-ren L^q-batezbestekoa I tartean adierazten du:

$$\langle f \rangle_{q,I} := \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}}$$



Sparse eragileen propietatea

Proposizioa

Izan bitez $1 \leq q < p < \infty$, $\mathcal{S}$ sparse bilduma bat eta $f \in L^p(\mathbb{R})$. Orduan,

$$\|T_{q,s} f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Sparse eragileen propietatea

Proposizioa

Izan bitez $1 \leq q < p < \infty$, $\mathcal{S}$ sparse bilduma bat eta $f \in L^p(\mathbb{R})$. Orduan,

$$\|T_{q,s} f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Frogapenaren funtsezko ideia:
Lehenengo ohartu edozein $I \in \mathcal{S}$ tarterako,

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f(y)|^q dy \leq \sup_{J \ni x} \frac{1}{|J|} \int_J |f(y)|^q dy \qquad x \in I.$$

Sparse eragileen propietatea

Proposizioa

Izan bitez $1 \leq q < p < \infty$, $\mathcal{S}$ sparse bilduma bat eta $f \in L^p(\mathbb{R})$. Orduan,

$$\|T_{q,s} f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Frogapenaren funtsezko ideia:
Lehenengo ohartu edozein $I \in \mathcal{S}$ tarterako,

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f(y)|^q dy \leq \sup_{J \ni x} \frac{1}{|J|} \int_J |f(y)|^q dy =: M(f^q)(x), \qquad x \in I.$$

Sparse eragileen propietatea

Proposizioa

Izan bitez $1 \leq q < p < \infty$, $\mathcal{S}$ sparse bilduma bat eta $f \in L^p(\mathbb{R})$. Orduan,

$$\|T_{q,\mathcal{S}} f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Frogapenaren funtsezko ideia:
Lehenengo ohartu edozein $I \in \mathcal{S}$ tarterako,

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|^q dy \leq \sup_{J \ni x} \frac{1}{|J|}\int_J |f(y)|^q dy =: M(f^q)(x), \qquad x \in I.$$

Orduan,

$$\sum_{I \in \mathcal{S}} \langle f \rangle_{q,I}^p |I|$$

Sparse eragileen propietatea

Proposizioa

Izan bitez $1 \leq q < p < \infty$, $\mathcal{S}$ sparse bilduma bat eta $f \in L^p(\mathbb{R})$. Orduan,

$$\|T_{q,s} f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Frogapenaren funtsezko ideia:
Lehenengo ohartu edozein $I \in \mathcal{S}$ tarterako,

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|^q dy \leq \sup_{J \ni x} \frac{1}{|J|}\int_J |f(y)|^q dy =: M(f^q)(x), \qquad x \in I.$$

Orduan,

$$\sum_{I \in \mathcal{S}} \langle f \rangle_{q,I}^p |I| \leq \frac{1}{\eta} \sum_{I \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f|^q \right)^{\frac{p}{q}} |E_I|$$

Sparse eragileen propietatea

Proposizioa

Izan bitez $1 \leq q < p < \infty$, $\mathcal{S}$ sparse bilduma bat eta $f \in L^p(\mathbb{R})$. Orduan,

$$\|T_{q,\mathcal{S}} f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Frogapenaren funtsezko ideia:
Lehenengo ohartu edozein $I \in \mathcal{S}$ tarterako,

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|^q dy \leq \sup_{J \ni x} \frac{1}{|J|}\int_J |f(y)|^q dy =: M(f^q)(x), \qquad x \in I.$$

Orduan,

$$\sum_{I\in\mathcal{S}} \langle f\rangle_{q,I}^p |I| \leq \frac{1}{\eta}\sum_{I\in\mathcal{S}} \left(\frac{1}{|I|}\int_I |f|^q\right)^{\frac{p}{q}} |E_I| = \frac{1}{\eta}\sum_{I\in\mathcal{S}} \int_{E_I} \left(\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|^q\, dy\right)^{\frac{p}{q}} dx$$

Sparse eragileen propietatea

Proposizioa

Izan bitez $1 \leq q < p < \infty$, $\mathcal{S}$ sparse bilduma bat eta $f \in L^p(\mathbb{R})$. Orduan,

$$\|T_{q,\mathcal{S}} f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Frogapenaren funtsezko ideia:
Lehenengo ohartu edozein $I \in \mathcal{S}$ tarterako,

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f(y)|^q dy \leq \sup_{J \ni x} \frac{1}{|J|} \int_J |f(y)|^q dy =: M(f^q)(x), \qquad x \in I.$$

Orduan,

$$\sum_{I \in \mathcal{S}} \langle f \rangle_{q,I}^p |I| \leq \frac{1}{\eta} \sum_{I \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f|^q \right)^{\frac{p}{q}} |E_I| = \frac{1}{\eta} \sum_{I \in \mathcal{S}} \int_{E_I} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(y)|^q \, dy \right)^{\frac{p}{q}} dx$$
$$\leq \frac{1}{\eta} \sum_{I \in \mathcal{S}} \int_{E_I} M(f^q)(x)^{\frac{p}{q}} dx$$

Sparse eragileen propietatea

Proposizioa

Izan bitez $1 \leq q < p < \infty$, $\mathcal{S}$ sparse bilduma bat eta $f \in L^p(\mathbb{R})$. Orduan,

$$\|T_{q,s}f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_{p,q}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Frogapenaren funtsezko ideia:
Lehenengo ohartu edozein $I \in \mathcal{S}$ tarterako,

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|^q dy \leq \sup_{J \ni x} \frac{1}{|J|}\int_J |f(y)|^q dy =: M(f^q)(x), \qquad x \in I.$$

Orduan,

$$\sum_{I \in \mathcal{S}} \langle f \rangle_{q,I}^p |I| \leq \frac{1}{\eta}\sum_{I \in \mathcal{S}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f|^q\right)^{\frac{p}{q}} |E_I| = \frac{1}{\eta}\sum_{I \in \mathcal{S}}\int_{E_I}\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|^q\, dy\right)^{\frac{p}{q}} dx$$
$$\leq \frac{1}{\eta}\sum_{I \in \mathcal{S}}\int_{E_I} M(f^q)(x)^{\frac{p}{q}} dx \leq \frac{1}{\eta}\int_{\mathbb{R}} M(f^q)(x)^{\frac{p}{q}} dx$$

Sparse eragileen propietatea

Proposizioa

Izan bitez $1 \leq q < p < \infty$, $\mathcal{S}$ sparse bilduma bat eta $f \in L^p(\mathbb{R})$. Orduan,

$$\|T_{q,\mathcal{S}} f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Frogapenaren funtsezko ideia:

Lehenengo ohartu edozein $I \in \mathcal{S}$ tarterako,

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|^q dy \leq \sup_{J \ni x} \frac{1}{|J|}\int_J |f(y)|^q dy =: M(f^q)(x), \qquad x \in I.$$

Orduan,

$$\sum_{I\in\mathcal{S}} \langle f \rangle_{q,I}^p |I| \leq \frac{1}{\eta}\sum_{I\in\mathcal{S}} \left(\frac{1}{|I|}\int_I |f|^q\right)^{\frac{p}{q}} |E_I| = \frac{1}{\eta}\sum_{I\in\mathcal{S}} \int_{E_I} \left(\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|^q\, dy\right)^{\frac{p}{q}} dx$$
$$\leq \frac{1}{\eta}\sum_{I\in\mathcal{S}} \int_{E_I} M(f^q)(x)^{\frac{p}{q}} dx \leq \frac{1}{\eta}\int_{\mathbb{R}} M(f^q)(x)^{\frac{p}{q}} dx \lesssim_{p,q} \frac{1}{\eta}\int_{\mathbb{R}} f(x)^p dx.$$

Gure emaitza

Teorema (F. Di Plinio, M. F-A., L. Roncal, I. Parissis, 2024)

Izan bedi $f \in L^2(\mathbb{R})$. Existitzen da $\mathcal{S}$ sparse bilduma bat non

$$Tf(x) \leq C T_{2,\mathcal{S}} f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Gure emaitza

Teorema (F. Di Plinio, M. F-A., L. Roncal, I. Parissis, 2024)

Izan bedi $f \in L^2(\mathbb{R})$. Existitzen da $\mathcal{S}$ sparse bilduma bat non

$$Tf(x) \leq C T_{2,\mathcal{S}} f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Korolarioa (J. L. Rubio de Francia, 1985)

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \qquad 2 < p < \infty.$$

Eskerrik asko

Mila esker zuen arretagatik!