MARIA JESUS ESTEBAN GALARZA, Zientzia Matematikoetan Doktorea, Frantziako C.N.R.S.-ko lankidea eta Pariseko Pierre et Marie Curie Unibertsitateko (Paris VI) Analisi Numerikorako Laborategiko Irakasleak.

AZALTZEN DU:

Ezen, Enrike Zuazua Iriondo-k aurkezturiko "Metodo Bariazionalen bidezko Problema Eliptiko Ez-Linealen ebazpena" izeneko memoria, bere zuzendaritzaz burutua izan dela.

Bilbon, 1.984.eko Ekainean.

Maria Jesus Esteban Galarza.

JUAN CARLOS PERAL ALONSO Jauna, Euskal Herriko Unibertsitateko Zientzi Fakultateko Matematika Departamentuko zuzendariak.

AZALTZEN DU:

Ezen, memoria hau MARIA JESUS ESTEBAN GALARZA Doktorearen zuzendaritzaz, ENRIKE ZUAZUA IRIONDO-k Departamentu honetan burutua izan dela, eta Tesina modura beraren defentsa baimentzen da Zientzia Matematikoetan Lizentziatur Gradua lortzeko.

Bilbon, 1.984.eko Ekainean.

Juan Carlos Peral Alonso.

Lehendabizi, nire esker beroenak azaltzea nahi ditut:

Maria Jesus Estebani, tesina honetarako gai horren polita eta interesgarria aukeratzeagatik, eta lan honetan zehar berarengandik jasotako laguntza eta zuzendaritza paregabekoagatik.

Mikel Bilbaori, lan honetako lehen urratsetan eskaini didan laguntzagatik.

Martxel Ensunza, Kepa Altonaga eta Txankarri, euskal textuaren prestaketan emandako laguntza eta aholkuengatik, eta zeintzuren idazmakinarik gabe....

Lan honen burutzapenean parte hartu duten guztiei.

Lan hau, egunero-eguneroko zuen esportzu eta laguntza moralaz, berau burutzera eraman nauzuen guztioi eskaini dizuet.

SARRERA.

SARRERA.

Euler-ek, 1.752. urtean, beraren "Principles of the motion of fluids" argitarapenean, potentzialaren ekuazioa azaltzen du lehen aldiz.

Azterturiko fluidoa konprimaezina zela kontsideratuz eta fluidoaren puntu baten abiadura, S funtzio baten ∇S gradiente bektorearen bidez adieraz zitekeela suposatuz, S funtzioak ondoko ekuazioa betetzen zuela ikusi zuen:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Ezaguna denez, (1) ekuazioa "Potentzialaren edo Laplace-ren ekuazioa" da.

Halaber, XVIII. mendean, Laplace-k, gorputz batek beste gorputz puntual batetan eragiten zuen erakarpen grabitatorioaren problema aztertzerakoan, potentzialaren ekuazioa lortu zuen.

1.813. urtean, Poisson-ek, aurreko mendean Laplacek esandakoari zuzenketa bat egin zion. Poisson-ek ikusi zuen moduan, (1) ekuazioak, masa puntuala masa eragiletik kanpo zegoeneko kasuan balio zuen soilik, masa puntuala masa eragilearen barnean zegoenean, ondoko Poisson-en ekuazioa lortzen zelarik:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho. \tag{2}$$

ρ, masa eragilearen dentsitatea zela kontsideratuz.

Hauek dira hain zuzen, potentzialaren ekuazioaren eta ekuazio eliptikoen lehen urratsak.

Ikusten denez, berriz ere, Fisikak bere problemetarako ereduak sortzerakoan, ekuazio matematikoetara jotzen du.

Honelatan ba, Matematikaren atal nagusienetariko bat sortzen da: DERIBATU PARTZIALETAKO EKUAZIOAK

(D.P.E.).

XVIII. mendetik aurrerantzean, D.P.E.-n mundu honetan aritu izan dira zenbait matematikari ospetsu.Batzu aipatzeagatik, hor ditugu, Poisson, Green, Riemann, Neumann,etab., Potentzialaren Teoriaren barnean.

Dena dela, gaur egun, Teoria Klasikoa nolabait atzean utziz, Teoria Moderno batetaz hitzegin daiteke, Analisi Funtzionala eta Metodo Topologikoak beraren oinarria direlarik gehien bat.

D.P.E.-n artean, Ekuazio Eliptiko Ez-linealen eremuak, Schauder eta Leray-ren lehen lanen ondoren, mende honetako hirugarren hamarkadatik aurrerantzean izugarrizko garapena izan du .

Ekuazio Eliptiko Ez-linealen arteko atal bat, Ekuazio Eliptiko Erdilinealena da. Arlo honetan, ondoko problemak aztertzen dira esatebaterako:

$$(3) \qquad \begin{cases} -\Delta u=f(x,u), & \Omega\text{-n.} \\ u=0, & \partial\Omega\text{-n.} \end{cases}$$

$\Omega\subset R^N$ irekia izanik eta f(x,z) emaniko funtzioa.

Aipa ditzagun problema hauek ebazteko erabiltzen diren metodorik garrantsitsuenak:

(i) Monotoni Metodoa.

(ii) Metodo Topologikoak (Schauder-en puntu fixuaren teorema, Leray-Schauder-en Graduaren Teoria,etab.)

(iii) Metodo Bariazionalak.

Metodo Bariazionalen artean, Puntu Kritikoen Metodoen bultzatzailerik handiena P.H.Rabinowitz dugu.

Gu, lan honetan, Rabinowitz-en (14) argitarapeneko metodoari jarraitu gatzaizkio, berau egokituz, zenbait problema aztertzen saiatu garelarik.

Esan behar da, halaber, problema hauek aztertzea oso interesgarria dela, zeren eta Fisika Teorikoaren eta Mekanika Kuantikoaren problemak modelizatzean agertzen baitira. Hortaz, oso garrantzitsua da berauen ebazpenen existentzia eta unizitateari buruzko emaitzak ezagutzea eta beraien propietateetaz jabetzea, adibidez, zein espaziotan kokatzen diren ezagutuz.

Gure lan honen helburua, Neumann-en ondoko Problema Eliptiko Erdilineala aztertzea da,aipaturiko Rabinowitz-en metodoa egokituz:

$$(4) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(u), \ \Omega\text{-n.} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \partial\Omega\text{-n.} \end{cases}$$

$\Omega \subset R^N$ $(N \geqslant 3)$ ireki bornatu konexu eta erregularra izanik.

Metodo honi jarraituz, problema hau ebaztea ezinezkoa aurkitu dugun kasuetan, mugako baldintza zeiharra duten (5) problemen ebazpenen segida konbergenteen bidez, (4) problemaren ebazpenak lortzen saiatu gara,

$$(5) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(u), \ \Omega\text{-n.} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \varepsilon u = 0, \quad \partial\Omega\text{-n.} \end{cases}$$

Aukeratu dugun problema Neumann-ena izan da, Dirichlet-ena ebatzita bait zegoen metodo hau segituz.

Problema honen ebazpenen existentziari buruzko emaitzak frogatzean, $\overline{\lim_{t\to 0}}\ f(t)/t$ balioari laplacetarraren lehen autobalioarekin zerikusia duen baldintzak inposatu beharrean aurkitu gara. Hortaz, autobalio honetarako karakterizazioak ematen saiatu gara, bai mugako baldintza zeiharra deneko kasuan, bai Neumann-ena denekoan.

Lan honetan azterturiko problemetan agertzen den eragile diferentzial eliptikoa laplacetarra da;dena dela, hemen lortzen diren emaitzak, edozein eragile eliptikotarako heda daitezke.

Ikus dezagun azkenik, lanaren kapituluetako banaketa zein den, eta kapitulu bakoitzaren edukina.

(i) 0.Kapituluan, lanean zehar erabiliko diren notazio eta oinarrizko kontzeptu eta emaitzak aipatzen dira (Sobolev-en Espazioak, Sobolev-en injekzioak, Gree-en Formulak,etab.).

(ii) 1.Kapituluan, Rabinowitz-en (14) lanari oso hurbiletik jarraituz, hurrengo kapituluetan zehar behar izango diren puntu kritikoei buruzko emaitzak azaltzen dira, "mendilepoaren teorema" hain zuzen ere.

(iii) 2.Kapituluaren lehen atalean,Teoria Espektral orokorrari buruzko emaitza ezagunak azaltzen ditugu. Bigarrenean, gure problemei dagozkien autobalio-problemak aztertzen ditugu, hots, ondoko biak:

$$(7)\qquad \begin{cases} -\Delta u=\lambda u, & \Omega\text{-n.} \\ \frac{\partial u}{\partial n}+\varepsilon u=0, & \partial\Omega\text{-n.} \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} -\Delta u=\lambda u, & \Omega\text{-n.} \\ \frac{\partial u}{\partial n}=0, & \partial\Omega\text{-n.} \end{cases}$$

Bertan,problema hauen lehen autobalioetarako karakterizazio oso erabilgarriak lortzen dira.

(iv) 3.Kapituluan,Rabinowitz-en metodoa egokituz, (5) problemarako, ebazpenen existentzi teorema bat ematen da, f funtzioak zenbait baldintza betetzen dituenean, $u\in C^2(\overline{\Omega})$ ebazpen ez-negatibo eta ez-nulu bat gutxienez existitzen dela frogatuz.

(v) Azken Kapituluan, 4.ean hain zuzen, Neumann-en (4) problema aztertzen dugu. Lehen atalean, 3.Kapituluko existentzi teoremaren parekoa den emaitza bat frogatzen da.Bigarrenean, teorema honek baliorik ez dueneko kasuetan, (5) problemen ebazpenen segiden bidez, (4) problemaren ebazpenak lortzen saiatzen gara, oro har, ezinezkoa dela ikusiz. Azkenik, adibide baten bidez, egoera hau argitzen da.

AURKIBIDEA.

AURKIBIDEA.

SARRERA vi

AURKIBIDEA xi

0.KAPITULUA. NOTAZIOAK. OINARRIZKO KONTZEPTUAK ETA EMAITZAK.

0.1 Notazioak 2
0.2 Zenbait Espazio Funtzional 3
0.3 Sobolev-en Espazioak 5
0.3.1 Definizioa 5
0.3.2 Sobolev-en Injekzioak 6
0.3.3 Aztarren-Teorema 7
0.3.4 Green-en Formulak 8
0.4 Lanean zehar erabilitako laburpenak 9

1.KAPITULUA. PUNTU KRITIKOEI BURUZKO EMAITZAK.

1.1 Pseudogradiente bektorea. Pseudogradiente bektoreen eremua 11
1.2 Deformazio-Teorema 13
1.3 Puntu kritikoei buruzko emaitzak 19

2.KAPITULUA. LAPLACETARRAREN FUNTZIO ETA BALIO PROPIO LINEALAK.

2.1 Definizio eta emaitza orokorrak 22
2.2 Mugako baldintza zeiharra deneko laplacetarraren funtzio eta balio propio linealak 25
2.2.1 Problemaren planteamendua. Formulazio Bariazionala. 25
2.2.2 Aztarren-Teorema 28
2.2.3 Formulazio sendoa 31
2.2.4 λ_1 lehen autobalioaren karakterizazioa 34
2.3 Mugako baldintza Neumann-ena deneko laplacetarraren funtzio eta balio propio linealak 39
2.4 Osagarriak 41

3.KAPITULUA. MUGAKO BALDINTZA ZEIHARRA DUTENEKO PROBLEMA ELIPTIKO ERDILINEALEN AZTERKETA.

3.1 Problemaren planteamendua 44

3.2 Ebazpenen positibotasunarekiko zenbait kontsiderazio 45

3.3 Ebazpenen existentzi teoremaren frogapena 48

3.3.1 Formulazio bariazionala. Frogapenaren eskema 48

3.3.2 (A) baldintzaren frogapena 50

3.3.3 (B) baldintzaren frogapena 54

3.3.4 (C) baldintzaren frogapena 58

3.3.5 (D) baldintzaren frogapena 60

3.3.6 S_ε funtzionalaren puntu kritikoaren erregulartasuna 61

3.4 Ondorio gisa 64

4.KAPITULUA. MUGAKO BALDINTZA NEUMANN-ENA DENEKO PROBLEMA ELIPTIKO ERDILINEALEN AZTERKETA

4.1 Problemaren planteamendua 66

4.2 Ebazpenen existentzi Teorema 66

4.3 Mugako baldintza zeiharra duteneko problemen ebazpenen konbergentziaz 69

4.3.1 $l>0$ kasua 70

4.3.2 $l=0$ kasua 70

4.3.3 $l<0$ kasua 73

BIBLIOGRAFIA 78

HIZTEGIA 82

0.KAPITULUA.
NOTAZIOAK.OINARRIZKO KONTZEPTUAK ETA EMAITZAK.

0.1 Notazioak.
0.2 Zenbait espazio funtzional.
0.3 Sobolev-en espazioak.
 0.3.1 Definizioa.
 0.3.2 Sobolev-en injekzioak.
 0.3.3 Aztarren-teorema.
 0.3.4 Green-en formulak.
0.4 Lanean zehar erabilitako laburpenak.

0. NOTAZIOAK. OINARRIZKO KONTZEPTUAK ETA EMAITZAK.

0.1.-NOTAZIOAK.

$(E,\|\cdot\|)$ espazio bektorial normaduna izango da eta E' beraren duala.

$\rho>0$ eta $x\in E$ direnean, x zentruko eta ρ erradioko bola irekia, honela adieraziko dugu:

$$B_\rho(x)=B(x,\rho)=\{y\in E \ / \ \|x-y\|<\rho\}.$$

ostera,esfera hauxe izango da:

$$S_\rho(x)=S(x,\rho)=\{y\in E \ / \ \|x-y\|=\rho\}.$$

Bira $T\in E'$ eta $u\in E$. T funtzionalaren u puntuaren gaineko irudia, honela idatziko dugu: $\langle T,u\rangle$.

$U\subset E$ irekia denean eta $p\in N$, $C^p(U,R)$ U-tik R-raino ko C^p klaseko funtzioen bidez osoturiko espazioa izango da.

$\phi\in C^1(U,R)$ eta $u\in U$ badira, $\phi'(u)$ ϕ funtzioaren u puntuango diferentziala izango da.

$K\subset E$ eta $\delta>0$ direnean, $N_\delta(K)$ K multzoaren δ erradioko ingurunea izango da, hots,

$$N_\delta(K)=\{y\in E \ / \ d(y,K)=\|y-k\|<\delta\}$$

$d(y,K)=\|y-K\|$, y puntutik K multzorainoko distantzia izanik.

$x=(x_1,\ldots,x_n)$ ikurraren bidez, R^N espazioko edozein elementu adieraziko dugu. Bestalde, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$ N^N-ko multiindizea izango da, beraren gradua $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_N$ izango delarik.

$n\in\{1,2,\ldots,N\}$ bada, n-garren deribatu partzial eragilea, $\frac{\partial\cdot}{\partial x_n}$ ikurraren bidez adieraziko dugu. Modu berean,

$\alpha\in N^N$ denean, $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ $|\alpha|$ ordeneko ondoko eragile diferentziala izango da,

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$$

Oro har, $\Omega\subset R^N$ ireki bornatu erregular eta konexua izango da, beraren muga, $\Gamma=\partial\Omega$ izango delarik.

Ω ireki erregularra denean, Γ R^N-ko barietate erregularra izango da. n ikurraren bidez, Γ-ren kanpo-normal unitarioa adieraziko dugu, $d\sigma$ Γ barietateango gainazal -neurria izango delarik.

Ω-n definituriko funtzio erregular baten deribatu normala, hots, ϕ funtzioaren n bektore normalaren direkzioango deribatu direkzionala, $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ izango da. Honelatan ba,

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\nabla\phi\cdot n=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\cdot n_i$$

$\nabla\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial\phi}{\partial x_N}\right)$ ϕ funtzioaren gradiente bektorea izanik eta $n=(n_1,\ldots,n_N)$.

ϕ eta φ funtzioak erregularrak direnean, $\nabla\phi\cdot\nabla\varphi$ beraien gradienteen arteko biderkadura eskalarra izango da, hau da,

$$\nabla\phi\nabla\varphi=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

eta $|\nabla\phi|=\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}$ gradiente bektorearen modulua.

Ohizko notazioari jarraituz, laplacetar eragilea Δ ikurraren bidez adieraziko dugu. Honelatan, φ erregularra denean,

$$\Delta\varphi=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_N^2}.$$

0.2.-<u>ZENBAIT ESPAZIO FUNTZIONAL</u>.

$\Omega\subset R^N$ irekia izanik, $D(\Omega)$, Ω-n definituriko C^∞

klaseko eta euskarri trinkodun funtzioen multzoa izango da. Bestalde, $D'(\Omega)$ banaketen espazioa izango da.

$m\in N$ denean, $C^m(\Omega)$, Ω-n definituriko C^m klaseko funtzio errealen multzoa izango da.

Bestalde,

(0.1) $$C^m(\bar{\Omega})=\{u\in C^m(\Omega) \ / \ D^\alpha u \text{ bornatua eta uniformeki jarraia}, \forall|\alpha|\leq m\}.$$

Banach-en espazioa da, dagokion ondoko normaz,

(0.2) $$\|u\|_{C^m(\bar{\Omega})}=\sup_{0\leq|\alpha|\leq m}\ \sup_{x\in\Omega}|D^\alpha u(x)|$$

Biz $\lambda\in(0,1)$. Defini dezagun ondoko espazioa:

(0.3) $$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})=\{u\in C^m(\bar{\Omega}) \ / \ \exists k>0: |D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|\leq k|x-y|, \ \forall|\alpha|\leq m, \forall x,y\in\Omega\}.$$

$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ ere Banach-en espazioa da hurrengo normaz horniturik:

(0.4) $$\|u\|_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})}=\|u\|_{C^m(\bar{\Omega})}+\sup_{0\leq|\alpha|\leq m}\ \sup_{x,y\in\Omega}\frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

Honetaz gain,

(0.5) $$C^j_B(\Omega)=\{u\in C^j(\Omega) \ / \ D^\alpha u \text{ bornatua}, \forall|\alpha|\leq j\}$$

espazioa ere Banach-ena da ondoko normarekin:

$$\|u\|_{C^j_B(\Omega)}=\max_{0\leq|\alpha|\leq j}\ \sup_{x\in\Omega}|D^\alpha u(x)|.$$

Bestalde, ondoko partekotasunak jarraitasunez ematen dira:

$$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})\subset C^m(\bar{\Omega})\subset C^m(\Omega); \quad C^j_B(\Omega)\subset C^j(\Omega)$$

Kontutan izan beharko dugu baita ere, Ω bornatua denean ondoko injekzioak egiazkoak eta jarraiak direla:

$$C^j_B(\Omega)\subset L^p(\Omega),\ \forall j\in N,\ \forall p\in[1,+\infty].$$

Ostera, oro har, alderantzizkoak ez dira ematen.

0.3.-SOBOLEV-EN ESPAZIOAK.

0.3.1 Definizioa.

Bira $p\in[1,+\infty]$ eta $m\in N$.
$W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev-en espazioa honela definitzen da:

(0.6) $$W^{m,p}(\Omega)=\{u\in D'(\Omega): D^\alpha u\in L^p(\Omega),\forall|\alpha|\leq m\}.$$

Berari dagokion norma hauxe da:

(0.7) $$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\|u\|_{m,p}=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\left[\int_\Omega|D^\alpha u|^p\right]^{1/p},\ 1\leq p<\infty$$

eta

(0.8) $$\|u\|_{W^{m,+\infty}(\Omega)}=\max_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$1\leq p<+\infty$ deneko kasuan, hurrengo norma, aurrean definitutakoarekin baliokidea da:

(0.9) $$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\left\{\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right\}^{1/p}.$$

Erraz froga daiteke $(W^{m,p}(\Omega),\|\cdot\|_{m,p})$ Banach-en espazioa dela.

$m=0$ deneko kasuan, $W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$, eta $\|\cdot\|_{0,p}=\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$.

$p=2$ deneko kasuan, $W^{m,2}(\Omega)$ Hilbert-en espazioa da. Kasu honetan, Sobolev-en espazioa honela adieraziko dugu:

$$W^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega).$$

Argi dago, ezen $D(\Omega)$-ko elementu guztiak, $W^{m,p}(\Omega)$-koak direla, $\forall m\in N, p\in[1,+\infty]$. $D(\Omega)$-ren $W^{m,p}(\Omega)$ espazioko topologiarekiko itxidura $W^{m,p}_0(\Omega)$ izango da. Bereziki, $p=2$ denean, $H^m_0(\Omega)$.

Bestalde, $1\leq p<+\infty$ deneko kasuan, $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ $W^{m,p}(\Omega)$ espazioan dentsoa dela froga daiteke.

Honetaz gain, argi dago, ezen $\nabla u\in(L^2(\Omega))^N$, $H^1(\Omega)$ -ko edozein elementutarako, $\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\Omega)$ baita, $\forall i\in\{1,\dots,N\}$. Beraz, $u\in H^1(\Omega)$ bada, beraren gradientearen norma ondokoa izango da,

$$\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}=\left[\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Hurrengo desberdintza betetzen dela bistakoa da:

$$\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}\leq\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

0.3.2 Sobolev-en injekzioak.

Biz $\Omega\subset R^N$ ireki bornatu erregularra. Hurrengo injekzioak, jarraiak izateaz gain trinkoak dira. Berauek, Sobolev-en injekzioetaz ezagutzen dira:

(0.10) $mp<N$ bada,

$$W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\quad 1\leq q\leq Np/N-mp.$$

(0.11) $mp=N$ bada,

$$W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\quad 1\leq q<+\infty.$$

(0.12) $mp>N$ bada:

$$W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

(0.13) $mp>N\geq(m-1)p$ denean,

$$W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{j,\lambda}(\Omega),\quad 0<\lambda<m-(N/p).$$

Honetaz gain, $mp<N$ deneko kasuan, $W^{j+m,p}(\Omega)$-tik $W^{j,q}(\Omega)$-rainoko injekzioa jarraia da, $q=Np/(N-mp)$ izanik.

0.3.3 Aztarren-teorema.

Sobolev-en espazioen definizioa orokorragoa egin daiteke, $W^{m,p}(\Omega)$ eta $L^p(\Omega)$ espazioen arteko zenbait espazio definituz.

Bira $s\in(0,1)$ eta $p\in[1,+\infty]$. $W^{s,p}(\Omega)$ Sobolev-en espazioa honela definitzen da:

$$(0.14)\qquad W^{s,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega)\ \Big/\ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s+N/p}}=\phi(x,y)\in L^p(\Omega\times\Omega)\right\}.$$

dagokion norma ondokoa izango delarik:

$$(0.15)\qquad \|u\|_{s,p}=\|u\|_{L^p(\Omega)}+\|\phi(\cdot,\cdot)\|_{L^p(\Omega\times\Omega)}$$

Honetaz gain, $s\in R$, $s>1$ bada; $s=m+\sigma$, $m\in N$ eta $\sigma\in(0,1)$ izanik,

$$(0.16)\qquad W^{s,p}(\Omega)=\left\{u\in W^{m,p}(\Omega)\ /\ D^\alpha u\in W^{\sigma,p}(\Omega),\forall|\alpha|=m\right\}.$$

Modu honetan, $s\in R_+$ eta $p\in[1,+\infty]$ edozeintzutarako, $W^{s,p}(\Omega)$ Sobolev-en espazioa definituta dugu.

Lehen aipatu dugun moduan, Ω ireki erregularra denean, Γ, beraren muga, barietate erregularra da, $d\sigma$ gainazal-neurria definituta izango dugularik. Hortaz, barietateango karta lokalak erabiliz, $W^{s,p}(\Gamma)$ espazioak defini daitezke Γ bornatua denean, bereziki, Ω bornatua deneko kasuan.

Lan honetan zehar beharrezkoa izango dugun aztarren-teoriako emaitza, ondokoa da.

0.17.Proposizioa. Ω ireki bornatu erregularra bada, existitzen da,

$$\gamma_0:\ H^1(\Omega)\longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

aztarren eragile lineal jarrai suprajektiboa.

$u \in C^1(\overline{\Omega})$ deneko kasuan, $\gamma_0(u)=u_{|\Gamma}$ da, hau da, u funtzioaren Γ mugarako murrizpena.

$\gamma_0(u) \in H^{1/2}(\Gamma)$ elementuari, $u \in H^1(\Omega)$ elementuaren aztarrena deitzen zaio.

Bestalde, $l_\Omega : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^1(\Omega)$ eragile lineal jarrai bat defini daiteke, zeinetarako: $\gamma_0 \circ l_\Omega(v)=v, \forall v \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Honetaz gain, $H^{1/2}(\Gamma)$-tik $L^2(\Gamma)$-rainoko injekzioa jarraia izateaz gain trinkoa da eta $H^{1/2}(\Gamma)$ dentsoa da $L^2(\Gamma)$ espazioan.

Erraz froga daiteke bestalde, γ_0 aplikazioaren nukleoa $H_0^1(\Omega)$ espazioa dela. Hau da, $H_0^1(\Omega)=\{u \in H^1(\Omega) / \gamma_0(u) =0\}$.

γ_0 eragileak betetzen dituen baldintzak kontutan izanik, erraz froga daiteke, ondoko aplikazioa norma dela $H^{1/2}(\Gamma)$-n eta karta lokalen bidez definiturikoarekin baliokidea dela,

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \inf_{\substack{w \in H^1(\Omega) \\ \gamma_0(w)=v}} \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

Bestalde, kontutan izan beharko da, ezen $H^{1/2}(\Gamma)$ espazioaren duala $H^{-1/2}(\Gamma)$ dela.

0.3.4 <u>Green-en Formulak</u>.

Erabilera handikoak izango direnez gero, ondoko Green-en bi formulak azalduko ditugu, nahiz eta berauen frogapenik ez eman.

0.18.<u>Proposizioa</u>. Ondoko Green-en bi formulak betetzen dira:

(a) $u,v \in H^1(\Omega)$ badira, orduan:

(0.19) $$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma v u n_i \, d\sigma, \quad i=1,\dots,N.$$

n_i, n kanpo-normalaren i-garren koordenatua izanik.

(b) Bira $u \in H^2(\Omega)$ eta $v \in H^1(\Omega)$, orduan:

$$(0.20) \qquad -\int_{\Omega} \Delta u\, v\, dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v\, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma .$$

Kontutan izan behar da, ezen (0.19) formulako $\int_{\Gamma} uvn_i d\sigma$ mugako integralak zentzua izan dezan, $v_{|\Gamma}$ eta $u_{|\Gamma}$ aztarrenak $L^2(\Gamma)$-koak izan behar dutela, beraz, u eta v funtzioek $H^1(\Omega)$ espaziokoak izan behar dute. Modu berean, (0.20) formulako $\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma$ mugako integralak zentzua izan dezan, $\frac{\partial u}{\partial n}$ deribatu normalak $H^{1/2}(\Gamma)$-koa izan beharko du, hau da, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $H^1(\Omega)$-koa, $\forall i \in \{1,\ldots,N\}$ edo baliokidea dena, $u \in H^2(\Omega)$.

0.21.Oharra. Atal honetako erreferentzia zabalagoak izateko, ikus (1) eta (5).

0.4.-LANEAN ZEHAR ERABILITAKO LABURPENAK.

Pseudogradientea	.... P.G.
Hurrenez hurren	.... H.H.
Adibidez	.... ADB.
Ia nonnahi	.... I.N.
Konstantea	.... KTEA.
Palais-Smale	.... P.S.
Agmon-Douglis-Niremberg	.... A.D.N.

1.KAPITULUA.
PUNTU KRITIKOEI BURUZKO EMAITZAK.

1.1 Pseudogradiente bektorea. Pseudogradiente bektoreen eremua.
1.2 Deformazio-Teorema.
1.3 Puntu kritikoei buruzko emaitzak.

1.PUNTU KRITIKOEI BURUZKO EMAITZAK.

Sarreran aipatu dugun moduan, kapitulu honetan agertzen diren emaitzak P.H.Rabinowitz-en (14) argitarapenetik ateratakoak dira.

1.1.-PSEUDOGRADIENTE BEKTOREA. PSEUDOGRADIENTE BEKTOREEN EREMUA.

Bira $(E,\|\cdot\|)$ Banach-en espazioa, $U\subset E$ irekia eta $f\in C^1(u,R)$.

E espazioko eta E' beraren dualeko normak ez ditugu bereiztuko. Biak $\|\cdot\|$ ikurrarekin adieraziko ditugu.

1.1.<u>Definizioa</u>. $v\in E$ bektorea f funtziorako eta $u\in U$ puntuango <u>pseudogradiente</u> (p.g.) <u>bektorea</u> dela esango dugu, ondoko baldintzak betetzen direnean:

(1.2) $\|v\|\leqslant 2\|f'(u)\|$

(1.3) $\langle f'(u),v\rangle\geqslant\|f'(u)\|^2$

Oro har, p.g. bektorea ez da bakarra izango. $u\in U$ puntuango eta f funtziorako p.g. bektoreen konbinazio lineal konbexuak, u puntuango eta f funtziorako p.g. bektoreak dira.

1.4.<u>Definizioa.</u> Biz $\tilde{E}=\{u\in U:f'(u)\neq 0\}$. $\tilde{E}$-tik E-rainoko $v(\cdot)$ funtzioa, f funtziorako eta $\tilde{E}$ gaineko <u>p.g. bektoreen eremua</u> dela esango dugu, baldin $v(\cdot)$ lokalki lipschitzearra bada eta $v(x)$ f funtziorako eta x puntuango p.g. bektorea $\forall x\in\tilde{E}$.

1.5.<u>Lema</u>. Biz $f\in C^1(E,R)$. Existitzen da $v(\cdot)$, f funtziorako eta E gaineko p.g. bektoreen eremua.

f funtzioa bikoitia deneko kasuan, $v(\cdot)$ funtzioa bakoitia aukera daiteke.

Frogapena.

Biz $u\in E$. Biz, halaber, $w\in E$ zeinetarako $\|w\|=1$ eta $\langle f'(u),w\rangle > 2/3\|f'(u)\|$ diren.

Kontsidera dezagun ondoko z bektorea:

(1.6) $$z=3/2\|f'(u)\|w$$

Hurrengo (1.7) eta (1.8) adierazpenak betetzen direnez gero, z u puntuango eta f funtziorako p.g. bektorea da:

(1.7) $$\|z\|=3/2\|f'(u)\|<2\|f'(u)\|$$

(1.8) $$f'(u),z =3/2\|f'(u)\|\langle f'(u),w\rangle > \|f'(u)\|^2$$

$f'(\cdot)$ funtzio diferentziala jarraia da, beraz, (1.7) eta (1.8) desberdintza hauek hertsiak direnez gero, z bektorea u puntuaren N_u ingurune baten edozein puntutango p.g. bektorea izango da.

$\{N_u\}_{u\in E}$ inguruneen familia, E-ren estalkia da, beraz, existituko da $\{N_{u_i}\}_{i\in I}$ birfinketa lokalki finitu bat.

Biz $i\in I$. Kontsidera dezagun $p_i(x)$, x puntutik N_{u_i} ingurunearen osagarrirainoko distantzia neurtzen duen aplikazioa, hots,

$$p_i(x)=\|x-N^c_{u_i}\|$$

$p_i(\cdot)$ funtzioa lipschitzearra da eta N_{u_i} multzoaren osagarrian zero balioa hartzen du.

Kontsidera ditzagun ondoko funtzioak:

$$\beta_i(x)=\frac{p_i(x)}{\sum_{j\in I} p_j(x)}, \forall i\in I$$

$\{N_{u_i}\}_{i\in I}$ estalkia lokalki finitua denez gero, $x\in\tilde{E}$ edozeinetarako $\sum_{j\in I} p_j(x)$ batura finitua da. Beraz, $\beta_j(\cdot)$ funtzioa ondo definituta dago.

Azkenik, biz hurrengo funtzioa:

$$v(x)=\sum_{i\in I} z_i\beta_i(x)$$

z_i bektorea, $u=u_i$ bektoreari (1.6) adierazpenean dagokiona izanik.

$v(\cdot)$ funtzioa lokalki lipschitzearra da eta $x\in\tilde{E}$

edozein puntutarako, $v(x)$ x puntuango eta f funtziorako p.g. bektorea da, beraz, $v(\cdot)$ f funtziorako eta E gaineko p.g. bektoreen eremua da.

f funtzioa bikoitia deneko kasuan, $f'(\cdot)$ beraren funtzio diferentziala bakoitia izango da, hortaz,

$$\bar{v}(x)=\tfrac{1}{2}(v(x)-v(-x)),\ \forall x\in\tilde{E}$$

funtzioa p.g. bektoreen eremua izango da, eta honetaz gain, bakoitia.|

1.2.-DEFORMAZIO-TEOREMA.

1.9.Definizioa. Biz $f\in C^1(E,R)$. $u\in E$ puntua f funtzioaren puntu kritikoa da, baldin $f'(u)=0$ bada.

Bestalde, $c\in R$ f funtzioaren balio kritikoa dela esango dugu, baldin $f^{-1}(c)$ multzoak puntu kritikoren bat barnetzen badu.

Biz $b\in R$. Kontsidera ditzagun ondoko multzoak:

$$A_b=\{x\in E\ /\ f(x)\leq b\}.$$

$$K_b=\{x\in E\ /\ f(x)=b \text{ eta } f'(x)=0\}.$$

Argi dago, K_b multzoa b balioari dagozkion puntu kritikoena dela, beraz, b balio kritikoa ez denean, $K_b=\emptyset$.

1.10.Definizioa. f funtzioak Palais-Smale-ren (P.S.) baldintza betetzen duela esango dugu, baldin, $|f(u_n)|$ bornatua eta $(f'(u_n))\longrightarrow 0$ baldintzak betetzen dituen E-ren edozein (u_n) segidak, azpisegida konbergente bat badu.

Baldintza hau, $\forall\alpha>0$, $f\geq\alpha>0$ (h.h. $f\leq-\alpha<0$) eskualdean betetzen denean, f funtzioak $(P.S.)^+$ (h.h. $(P.S.)^-$) baldintza betetzen duela esango dugu.

1.11.Teorema.(Deformazio-Teorema)

Biz $f\in C^1(E,R)$ (P.S.) baldintza betetzen duen funtzio bat. Biz $c\in R$. $N\subset E$ K_c multzoaren ingurunea bada, existitzen dira $\eta(t,x)=\eta_t(x)\in C([0,1]\times E,\ E)$

eta $\bar{\varepsilon}>\varepsilon>0$ konstanteak zeintzutarako:

1. $\eta_0(x)=x, \forall x\in E$.
2. $\eta_t(x)=x, \forall x\in \{f^{-1}[c-\bar{\varepsilon},c+\bar{\varepsilon}]\}^c, \forall t\in[0,1]$.
3. $\forall t\in[0,1], \eta_t(\cdot)$ funtzioa E-tik E-rainoko homeomorfismoa da.
4. $f(\eta_t(x))\leq f(x), \forall t\in[0,1], \forall x\in E$.
5. $\eta_1(A_{c+\varepsilon}-N)\subset A_{c-\varepsilon}$.
6. $K_c=\phi$ bada, $\eta_1(A_{c+\varepsilon})\subset A_{c-\varepsilon}$.
7. f bikoitia denean, $\eta_t(\cdot)$ bakoitia da.

<u>Frogapena</u>.

$K_c\neq\phi$ deneko kasuan frogatuko dugu, $K_c=\phi$ denekoa errazagoa da.

f funtzioak (P.S.) baldintza betetzen duenez gero, K_c multzoko edozein segidak azpisegida konbergente bat izango du, beraz, K_c trinkoa da. Honelatan ba,

$$\exists\delta>0 / M\delta=N\delta(K_c)\subset N.$$

Beraz, teoremaren 5. ondorioa frogatu beharrean, ondokoa frogatuko dugu:

(1.12) $$\eta_1(A_{c+\varepsilon}-M\delta)\subset A_{c-\varepsilon}.$$

Bestalde, badaude b, $\bar{\varepsilon}>0$ konstanteak zeintzutarako:

(1.13) $$\|f'(x)\|\geq b, \ \forall x\in A_{c+\bar{\varepsilon}}-A_{c-\bar{\varepsilon}}-M_{\delta/8}$$

Honela izango ez balitz, (ε_n), $(b_n)\subset R$ eta (x_n) segida batzu existituko lirateke, zeintzutarako:

$$\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=0, \ \|f'(x_n)\|<b_n, \forall n\in\mathbb{N}.$$

$$x_n\in A_{c+\varepsilon_n}-A_{c-\varepsilon_n}-M_{\delta/8}, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Honelatan ba, (P.S.) baldintza betetzen denez gero, (x_n)-k azpisegida konbergente bat izango zuen, beraren $x\in E$ limiteak ondokoak beteko zituelarik:

$$x\notin M_{\delta/8}, \ f(x)=c \wedge f'(x)=0 \Longleftrightarrow x\notin M_{\delta/8} \wedge x\in K_c.$$

,hortaz, kontraesan bat izango genuen, $K_c\subset M_{\delta/8}$ baita.

Bereziki, $\bar{\varepsilon}$ konstanteak ondokoa betetzen duela suposa daiteke:

(1.14) $$0<\bar{\varepsilon}<\min\left(\frac{b\delta}{8},\frac{b^2}{2},\frac{1}{8}\right)$$

Biz $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon})$. Bira:

$$A=\{x\in E/\ f(x)\geq c+\bar{\varepsilon}\ \vee\ f(x)\leq c-\bar{\varepsilon}\}$$

eta

$$B=\{x\in E/\ c-\varepsilon\leq f(x)\leq c+\varepsilon\}$$

Argi dago, $A\cap B=\emptyset$ dela.

Biz hurrengo funtzioa:

$$g(x)=\|x-A\|\cdot[\|x-A\|+\|x-B\|]^{-1}$$

$g(\cdot)$ funtzioa lokalki lipschitzearra da. $0\leq g\leq 1$ eta A-n g=0 da, B-n g=1 delarik.

Modu berean, $\bar{g}$ funtzio lokalki lipschitzear bat defini daiteke, $0\leq\bar{g}\leq 1$, $M\delta_{/8}$-n $\bar{g}=0$ eta $[E-M\delta_{/4}]$-n $\bar{g}=1$ izanik.

Kontsidera dezagun bestalde, R^+ multzoan definituriko ondoko funtzio erreala:

$$h(s)=\begin{cases}1 & , 0\leq s\leq 1.\\ s^{-1} & , 1\leq s<+\infty\end{cases}$$

$h(\cdot)$ funtzioa lokalki lipschitzearra da.

Honetaz gain, 1.5. lemari esker, existitzen da $v(\cdot)$ f funtziorako p.g. bektoreen eremua (bakoitia, f bikoitia denean).

Biz azkenik:

$$V(x)=-g(x)\bar{g}(x)h(\|v(x)\|)\,v(x),\ \forall x\in E.$$

$V(\cdot)$ lokalki lipschitzearra da eta $0\leq\|V(x)\|\leq 1, \forall x\in E$.

Kontsidera dezagun hurrengo ekuazio diferentziala:

(1.15) $$\begin{cases}\dfrac{d\eta}{dt}=V(\eta)\\ \eta(0,x)=x.\end{cases}$$

$x\in E$ edozeinetarako, (1.15) ekuazioak ebazpen maximal bakarra izango du, berau, $(-\infty,+\infty)$ tartean definituta egongo delarik, $V(\cdot)$ funtzioa bornatua baita.

Beraz, $\eta(t,x)\equiv\eta_t(x)$ funtzio jarraia $[0,1]\times E$-tik E-rainoko funtziotzat jo daiteke, hots,

$$\eta_t(x)\equiv\eta(t,x)\in C\big([0,1]\times E, E\big).$$

Ikus dezagun $\eta(\cdot,\cdot)$ funtzioak 1.etik 7.erainoko ondorioak betetzen dituela.

Hasierako baldintzak kontutan izanik, 1. ondorioa bistakoa da.

A multzoan g=0 da; beraz, V=0 izango da, honen ondorioz 2. lortzen delarik.

(1.15) ekuazioa autonomoa denez gero,

$$\eta_{t_1}(\eta_{t_2}(x))=\eta_{t_1+t_2}(x)\ ,\ \forall t_1,t_2\in\mathbb{R},\ \forall x\in E.$$

Beraz, $\eta_{-t}(\eta_t(x))=\eta_0(x)=x,\ \forall x\in E, \forall t\in[0,1]$ eta $\eta_t(\cdot)$ E-tik E-rainoko homeomorfismoa da, $\forall t\in[0,1]$.

f bikoitia denean, V bakoitia denez gero, $\eta_t(\cdot)$ ere bakoitia izango da, beraz, 7. beteko da.

Bestalde,

$$\text{(1.16)}\qquad \frac{d}{dt}f(\eta_t(x))=-g(\eta_t(x))\,\bar g(\eta_t(x))\,h\left(\|v(\eta_t(x))\|\right)\langle f'(\eta_t(x)),v(\eta_t(x))\rangle$$
$$\leq -g(\eta_t(x))\,\bar g(\eta_t(x))\,h\left(\|v(\eta_t(x))\|\right)\|f'(\eta_t(x))\|^2\leq 0$$

$v(\cdot)$ p.g. bektoreen eremua dela kontutan izanik.

Azkenik, (1.12) betetzen dela frogatzea geratzen zaigu.

Biz, $x\in A_{c+\varepsilon}-M_\delta$. $x\in A_{c-\varepsilon}$ bada, 1. ondorioari ezker, hauxe dugu:

$$f(\eta_1(x))\leq f(x)<c-\varepsilon$$

beraz, $\eta_1(x)\in A_{c-\varepsilon}$

Kontsidera dezagun bada, $x\in Y=A_{c+\varepsilon}-A_{c-\varepsilon}-M_\delta$ eta froga dezagun, $\eta_1(x)$ $A_{c-\varepsilon}$ multzoko elementua dela.

$A_{c-\bar\varepsilon}$ -n g=0 denez gero, V=0 izango da. Hortaz, $\eta(\cdot,x)$ orbita ezin izango da $A_{c-\bar\varepsilon}$ multzoan sartu. Honelatan ba,

$$0\leq f(\eta_0(x))-f(\eta_t(x))\leq 2\bar\varepsilon\ ,\ \forall t\in[0,1].$$

hau da, $\alpha_x(t)=f(\eta_t(x))$ bada,

$$\text{(1.17)}\qquad 0\leq\alpha_x(0)-\alpha_x(t)\leq 2\bar\varepsilon\ ,\ \forall t\in[0,1].$$

Biz $Z=A_{c+\varepsilon}-A_{c-\varepsilon}-M_{\delta/2}$.

$t\in[0,1]$ nahiko txikia denean, $\eta_s(x)\in Z, \forall s\in[0,t]$. Beraz, $\eta_s(x)\in\tilde{E}$ eta $g(\eta_s(x))=\bar{g}(\eta_s(x))=1, \forall s\in[0,t]$.

(1.16) adierazpena eta $\alpha_x(t)-\alpha_x(0)=\int_0^t \frac{d}{dt}f(\eta_s(x))ds$ dela kontutan izanik, ondokoa izango dugu:

$$
\begin{aligned}
(1.18)\qquad 2\bar{\varepsilon} &\geq \alpha_x(0)-\alpha_x(t) = -\int_0^t \frac{d}{dt} f(\eta_s(x))ds \\
&= \int_0^t h(\|v(\eta_s(x))\|)\langle f'(\eta_s(x)), v(\eta_s(x))\rangle ds \\
&\geq \int_0^t h(\|v(\eta_s(x))\|)\, \|f'(\eta_s(x))\|^2 ds \qquad \text{((1.3) erabiliz)} \\
&\geq b\int_0^t h(\|v(\eta_s(x))\|)\, \|f'(\eta_s(x))\| ds \qquad \text{((1.13) ")} \\
&\geq \frac{b}{2}\int_0^t h(\|v(\eta_s(x))\|)\, \|v(\eta_s(x))\| ds \qquad \text{((1.2) ")} \\
&\geq \frac{b}{2}\left\|\int_0^t h(\|v(\eta_s(x))\|)\, v(\eta_s(x))\, ds\right\| = \frac{b}{2}\left\|\int_0^t V(\eta_s(x))\, ds\right\| \\
&= \frac{b}{2}\left\|\int_0^t \frac{d}{dt}\eta_s(x)\, ds\right\| = \frac{b}{2}\|\eta_t(x)-\eta_0(x)\| = \frac{b}{2}\|\eta_t(x)-x\|
\end{aligned}
$$

beraz, $\|\eta_t(x)-x\| \leq \frac{4\bar{\varepsilon}}{b} < \delta/2$.

Honelatan ba, $\eta(\cdot,x)$ orbita ezin da $M_{\delta/2}$ ingurunean sartu. Honexegatik, $\eta_s(x)$ puntu bat Z-tik kanpo gera dadin $A_{c-\varepsilon}$ multzoan sartu beharko da eta $s\in[0,1]$ batetarako $\eta_s(x)\in A_{c-\varepsilon}$ badugu, $\eta_1(x)\in A_{c-\varepsilon}$ ere izango dugu 4. ondorioari esker. Hortaz, teorema hau burutzeko, nahikoa izango dugu ondokoa frogatzea:

$$\exists s\in[0,1] \,/\, \eta_s(x)\notin Z.$$

Suposa dezagun, $\forall t\in[0,1]$, $\eta_t(x)\in Z$ dugula. Dakigunez,

$$(1.19)\qquad \frac{d}{dt}\alpha_x(t) \leq -h(\|v(\eta_t(x))\|)\,\|f'(\eta_t(x))\|^2, \ \forall t\in[0,1],\ x\in Y$$

$\|v(\eta_t(x))\|\leq 1$ denean, $h(\|v(\eta_t(x))\|)=1$ da, beraz, (1.20) $$\frac{d\alpha_x(t)}{dt} \leq -\|f'(\eta_t(x))\|^2 \leq -b^2.$$

$\|v(\eta_t(x))\| \geq 1$ denean, $h(\|v(\eta_t(x))\|)=\|v(\eta_t(x))\|^{-1}$ da,

hortaz,

(1.21) $$\frac{d}{dt}\alpha_x(t) \leq -\frac{\|f'(\eta_t(x))\|}{\|v(\eta_t(x))\|} \leq -\frac{1}{4}\|v(\eta_t(x))\| < -\frac{1}{4}.$$

Honelatan ba,

(1.22) $$\frac{d}{dt}\alpha_x(t) \leq -\min(b^2, 1/4), \forall t \in (0,1), x \in Y.$$

Azken adierazpen hau (0,1) tartean integratu-rik,

(1.23) $$\min(b^2, 1/4) \leq \alpha_x(0) - \alpha_x(1) \leq 2\bar{\varepsilon}.$$

beraz, $\min(b^2,1/4)<2\bar{\varepsilon}$, (1.14) hautapenaren kontra doalarik.

1.24. Oharrak.

(i) $c>0$ (h.h. $c<0$) deneko kasuan, teorema hau frogatzeko, nahikoa izango litzateke f funtzioak $(P.S.)^+$ (h.h. $(P.S.)^-$) baldintza betetzea.

(ii) Biz $\tilde{A}_b = \{x \in E / f(x) \geq b\}$, $\forall b \in \mathbb{R}$.

Aurreko deformazio-teoremaren frogapenean V funtzioaren ordez -V hartu izan bagenu, ondoko emaitza lortu genukeen:

" $\exists \tilde{\eta}(t,x) \in C([0,1] \times E, E)$ eta $\bar{\varepsilon} > \varepsilon > 0$, zeintzutarako, 1.11 teoremako 1., 2., 3. eta 7. ondorioak betetzen diren eta hauetaz gain ondokoak ere:

4! $f(\tilde{\eta}_t(x)) \geq f(x), \forall t \in [0,1], \forall x \in E.$

5! $\tilde{\eta}_1(\tilde{A}_{c-\varepsilon} - N) \subset \tilde{A}_{c+\varepsilon}.$

6! $K_c=\phi$ denean, $\tilde{\eta}_1(\tilde{A}_{c-\varepsilon})\subset\tilde{A}_{c+\varepsilon}$.

1.3.-PUNTU KRITIKOEI BURUZKO EMAITZAK.

1.25.Teorema.Biz $h\in C^1(E,R)$.Suposa dezagun h funtzioak ondoko baldintzak betetzen dituela:

(h_1) $h(0)=0$ eta $\exists\rho,\alpha\geq 0$ / $h>0$ $B_\rho-\{0\}$ multzoan eta $h\geq\alpha$ S_ρ-n.

(h_2) $\exists$ $e\in E-\{0\}$ / $h(e)=0$.

(h_3) $(P.S.)^+$ baldintza.

Bira $\Gamma=\{g\in C([0,1],E)/g(0)=0 \wedge g(1)=e\}$ funtzioen multzoa eta $b=\inf_{g\in\Gamma}\max_{u\in g[0,1]} h(u)$

Hau horrela izanik,b zenbaki erreala h funtzioaren balio kritikoa da eta berari dagozkion puntu kritikoak ez-nuluak dira.

Frogapena.

$h(e)=0$ da,beraz,$h(x)>0,\forall x\in[B_\rho-\{0\}]$ denez gero, $e\in B_\rho^C$,hau da,$\|e\|\geq\rho$.

Hortaz,$g(0)=0$ eta $g(1)=e$ direnez gero,$\forall g\in\Gamma$, $g[0,1]\cap S_\rho\neq\phi$ .Biz $u_g\in g[0,1]\cap S_\rho$,Γ-ko edozein g-tarako.

(h_1) baldintza dela eta,$h(u_g)\geq\alpha$,$\forall g\in\Gamma$.Hortaz,

$$\max_{u\in g[0,1]} h(u)\geq h(u_g)\geq\alpha,\ \forall g\in\Gamma \Rightarrow b=\inf_{g\in\Gamma}\max_{u\in g[0,1]} h(u)\geq\alpha>0.$$

Beraz,b ez-nulua denez gero,balio kritikoa izango balitz,berari dagozkion puntu kritikoak ez-nuluak izango lirateke.

Suposa dezagun b zenbakia balio kritikoa ez dela.h funtzioari 1.11 teorema aplikatuz eta beraren 6.

ondorioa erabiliz,ondokoa dugu:

$$\exists \eta_1 \in C(E,E) \,/\, \eta_1(A_{b+\varepsilon}) \subset A_{b-\varepsilon}.$$

Kontutan izan behar dugu,bestalde, ε eta $\bar{\varepsilon}$ zenbaki positiboak,b baino txikiagoak aukera daitezkeela.

$b=\inf\limits_{g\in\Gamma}\ \max\limits_{u\in g[0,1]} h(u)$ denez gero, $\exists g\in\Gamma /\ \max\limits_{u\in g[0,1]} h(u)\leq b+\varepsilon$. Honetaz gain, 1.1 teoremako 2. ondorioari esker, $\eta_1(0)=0$ eta $\eta_1(e)=e$ direla dugu.

Honelatan ba,

$$\eta_1(g(0))=\eta_1(0)=0.$$

$$\eta_1(g(1))=\eta_1(e)=e.$$

Beraz $f=\eta_1\circ g$ funtzioa Γ multzokoa da eta halabeharrez

$$b\leq \max_{u\in f[0,1]} h(u).$$

Ostera, $\eta_1\circ g[0,1]=f[0,1]\subset \eta_1(A_{b+\varepsilon})\subset A_{b-\varepsilon}$ dugunez gero,

$$b-\varepsilon\geq \max_{u\in f[0,1]} h(u)$$

kontraesan batetara heltzen garelarik.

Puntu kritikoei buruzko emaitza hau "Mendilepoaren teorema" edo "Zeladura-puntuaren teorema" izenen bidez ezagutzen da.

2.KAPITULUA.
LAPLACETARRAREN FUNTZIO ETA BALIO PROPIO LINEALAK.

2.1 Definizio eta emaitza orokorrak.
2.2 Mugako baldintza zeiharra deneko laplacetarraren funtzio eta balio propio linealak.
    2.2.1 Problemaren planteamendua. Formulazio bariazionala.
    2.2.2 Aztarren-teorema.
    2.2.3 Formulazio sendoa.
    2.2.4 λ_1 lehen autobalioaren karakterizazioa.
2.3 Mugako baldintza Neumann-ena deneko laplacetarraren funtzio eta balio propio linealak.
2.4 Osagarriak.

2. LAPLACETARRAREN FUNTZIO ETA BALIO PROPIO LINEALAK.

2.1.- DEFINIZIO ETA EMAITZA OROKORRAK.

Atal honetan, teoria espektral orokorrari buruzko emaitzak emango ditugu. Frogapenak ez ditugu egingo. Berauek aurkitzeko ikus (15).

Kontsidera ditzagun:

(i) V eta H ondoko baldintzak betetzen dituzten R-gaineko Hilbert-en espazioak:

(2.1) $V \subset H$, injekzioa jarraia da.

(2.2) V dentsoa da H espazioan.

$(\cdot,\cdot)$ H espazioko biderkadura eskalarra izango da eta $|\cdot|$ berari dagokion norma. Bestalde, $\|\cdot\|$ V espazioko norma izango da.

(2.1) adierazpenaren ondorio bezala, ondokoa dugu:

(2.3) $\exists c>0 / |v| \leq c\|v\|, \forall v \in V.$

(ii) $a(\cdot,\cdot)$ V espazioan definituriko forma bilineal jarraia.

Aztertuko dugun problema espektral orokorra hauxe izango da:

"$\lambda \in R$ balioak aurkitzea zeintzutarako ondoko (2.4) baldintza betetzen duten $u \in V-\{0\}$ elementuak existitzen diren:

(2.4) $a(u,v)=\lambda(u,v), \forall v \in V.$"

2.5. <u>Definizioa</u>. $\lambda \in R$ eta $u \in V-\{0\}$ aurreko problemaren ebazpenak direnean, λ <u>balio</u> <u>propioa</u> edo <u>autobalioa</u> dela esango dugu eta u elementua, λ balio propioari dagokion <u>elementu</u> <u>propioa</u> edo <u>autoelementua</u>.

2.6. <u>Definizioa</u>. $a(\cdot,\cdot)$ forma bilineala <u>V-eliptikoa</u> edo <u>ko</u>

ertziboa da, baldin ondoko baldintza betetzen bada:

(2.7) $\exists\alpha>0/\ a(u,u)\geqslant\alpha\|u\|^2, \forall u\in V.$

2.8. Teorema. Suposa dezagun V-tik H-rainoko injekzioa jarraia dela eta $a(\cdot,\cdot)$ forma bilineal simetriko jarraia V-eliptikoa dela.

Hauek honela izanik, V espazioaren dimentsioa infinitua bada, (2.4) problema espektralaren balio propioak positiboak izango dira eta $+\infty$-ratz jotzen duen (λ_n) segida gorakor bat osotuko dute,

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$$

Bestalde, existituko da H espazioaren oinarri ortonormala osotzen duten bektore propioen segida bat (w_n). Beraz,

$$a(u,w_n)=\lambda_n(u,w_n), \forall u\in V, \forall n\in N.$$

Honetaz gain, $(\lambda_n^{-1/2}w_n)$ segidak V espazioaren eta $a(\cdot,\cdot)$ biderkadura eskalarrarekiko oinarri ortonormala osotuko du.

2.9. Oharra. Autobalio hauei buruzko estimazioak aurkitzeko, ikus (6). Teoria espektral orokorrari buruzko emaitzak, (7) liburuan aurki daitezke baita ere.

2.8. teoremaren ondorio bezala, λ_1 lehen autobaliorako ondoko karakterizazioa lortzen da:

(2.10) $\lambda_1=\min\limits_{v\in V-\{0\}} a(v,v)/|v|^2$

2.11. Adibidea. Biz $\Omega\subset R^n$, $n\geqslant 2$, ireki bornatu erregularra. Kontsidera dezagun ondoko problema:

(2.12) $-\Delta u=\lambda u, \Omega$-n.

(2.13) $u=0, \partial\Omega$-n.

Problema honen formulazio bariazionala eta erregulartasunari buruzko emaitzak erabiliz, 2.8. teoremari esker, ondokoa froga daiteke:

"Existitzen da (λ_n) autobalio positiboen segida gorakor bat, eta $L^2(\Omega)$ espazioko oinarri ortonormala osotzen duen $(u_n) \subset C^2(\bar{\Omega})$ autobalioen segida. λ_1 lehen autobaliorako ondoko karakterizazioa izango dugu:

$$\lambda_1 = \min_{u \in H_0^1 - \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx}. \tag{2.14}$$

Bestalde, λ_1-i dagozkion autofuntzioek zeinu bakarra dute Ω-n."

2.15. Oharra. Suposa dezagun $a(\cdot,\cdot)$ forma bilineal simetriko jarraia V-eliptikoa ez dela, baina ondoko baldintza betetzen duela:

$$\exists \lambda, \alpha > 0 / \ a(u,u) + \lambda(u,u) \geq \alpha |u|^2, \forall u \in V. \tag{2.16}$$

Kontsidera dezagun, $\bar{a}(u,v) = a(u,v) + \lambda(u,v), \forall u,v \in V$ forma bilineal simetriko V-eliptikoa.

Honelatan ba, 2.8. teoremako baldintzak ematen badira, existituko da $(\bar{\lambda}_n)$ autobalio positiboen segida gorakor bat, eta (w_n) H espazioko oinarri ortonormala osotzen duen autobektoreen segida. Hots,

$$\bar{a}(w_n, v) = \bar{\lambda}_n (w_n, v), \forall v \in V, \forall n \in N \Rightarrow$$

$$a(w_n, v) = (\bar{\lambda}_n - \lambda)(w_n, v), \forall v \in V, \forall n \in N.$$

Biz $\lambda_n = \bar{\lambda}_n - \lambda, \forall n \in N$. (λ_n) $+\infty$-rantz jotzen duen $a(\cdot,\cdot)$ formarekiko autobalioen segida gorakorra izango da, eta (w_n) H espazioko oinarri ortonormala osotzen duen autoelementuen segida.

Honetaz gain, $a(u,u) \geq 0, \forall u \in V$ denean, λ_n autobalioak ez-negatiboak izango dira.

2.2.-MUGAKO BALDINTZA ZEIHARRA DENEKO LAPLACETARRAREN FUNTZIO ETA BALIO PROPIO LINEALAK.

2.2.1 Problemaren planteamendua.Formulazio bariazionala.

Biz $\Omega\subset R^N$, $N\geq 2$, ireki bornatu erregularra, $\Gamma=\partial\Omega$ delarik.Biz $\varepsilon>0$.

Kontsidera dezagun ondoko problema:

"$\lambda\in R$ balioak aurkitzea,zeintzutarako ondoko bi berdintzak betetzen dituen u funtzio ez-nulua existitzen den:

(2.17) $-\Delta u=\lambda u$, Ω -n.

(2.18) $\frac{\partial u}{\partial n}+\varepsilon u=0$, Γ-n."

Ikus dezagun lehenik,problema honen formulazio bariazionala:

Bira (2.17) eta (2.18) berdintzak betetzen dituzten $\lambda\in R$ eta $u\in H^2(\Omega)$. $v\in H^1(\Omega)$ bada,Green-en formula aplikatuz,

$$-\int_\Omega \Delta u . v\,dx=\int_\Omega \nabla u\nabla v\,dx-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}.v\,d\sigma=\int_\Omega \nabla u\nabla v\,dx+\varepsilon\int_\Gamma uv\,d\sigma$$

(2.18) mugako baldintza kontutan badugu.Bestalde,

$$-\int_\Omega \Delta u . v\,dx=\lambda\int_\Omega uv\,dx$$

Honelatan ba,formulazio bariazionala hauxe izango da:

"$\lambda\in R$ balioak aurkitzea,zeintzutarako ondoko (2.19) berdintza betetzen duen $u\in H^1(\Omega)$ existitzen den:

(2.19) $$\int_\Omega \nabla u . \nabla v\,dx+\varepsilon\int_\Gamma u . v\,d\sigma=\lambda\int_\Omega uv\,dx,\ \forall v\in H^1(\Omega)"$$

2.20.Proposizioa.(2.19) problemaren autobalioak positiboak dira eta $+\infty$-rantz jotzen duen segida gorakor bat osotzen dute,

$$0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n\leq\cdots$$

Honetaz gain, badago $(u_n)\subset H^1(\Omega)$ $L^2(\Omega)$ espazioko oinarri ortonormala osotzen duen autofuntzioen segida bat.

Frogapena.

0.kapituluko Sobolev-en injekzioei esker dakigunez, $H^1(\Omega)$-tik $L^2(\Omega)$-rainoko injekzioa trinkoa da.

Kontsidera dezagun ondoko forma bilineal simetrikoa:

$$a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\nabla v\,dx+\varepsilon\int_\Gamma uv\,d\sigma\ ,\ \forall u,v\in H^1(\Omega).$$

$a(\cdot,\cdot)$ ez da $H^1(\Omega)$-eliptikoa, baina $\lambda>0$ bada,

$$\bar{a}(u,v)=a(u,v)+\lambda\int_\Omega uv\,dx,\ \forall u,v\in H^1(\Omega).$$

forma bilineal simetrikoa koertziboa da, hortaz, 2.15 oharreko baldintzetan gaude.

Honelatan ba, existitzen da $(\lambda_n)_{n\in N}$ $+\infty$-rantz jotzen duen (2.19) problemaren autobalioen segida. Honetaz gain, $a(\cdot,\cdot)$ forma bilineala positiboa da, beraz, $\lambda_n>0$, $\forall n\in N$.

Dakigunez, $\forall n\in N, \exists u_n\in H^1(\Omega)-\{0\}$ zeinetarako:

$$\int_\Omega \nabla u_n\nabla v\,dx+\varepsilon\int_\Gamma u_n v\,d\sigma=\lambda_n\int_\Omega u_n v\,dx,\ \forall v\in H^1(\Omega)$$

bereziki,

$$\int_\Omega|\nabla u_n|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma u_n^2\,d\sigma=\lambda_n\int_\Omega u_n^2\,dx,$$

$u_n\neq 0$ denez gero, $\int_\Omega u_n^2\neq 0$ eta

(2.21) $$\lambda_n=\frac{\int_\Omega|\nabla u_n|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma u_n^2\,d\sigma}{\int_\Omega u_n^2\,dx}>0$$

zeren eta, $\lambda_n=0$ izango balitz, $\int_\Omega|\nabla u_n|^2dx=0$ izango litzateke, hortaz, $u_n\equiv$ ktea. Bestalde, $\int_\Gamma u_n^2\,d\sigma=0$, beraz, $\gamma_0(u_n)=0$, honelatan ba, $u_n=0$.

Honetaz gain, 2.8.Teoremaren ondorio modura, $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ autofuntzioz osoturiko $L^2(\Omega)$ espazioko oinarri ortonormala existitzen dela badakigu.

Kontsidera dezagun problema espektral honi dagokion ondoko "Rayleigh-en zatidura",

$$R(v)=\frac{a(v,v)}{|v|^2}=\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx+\varepsilon\int_\Gamma u^2 d\sigma}{\int_\Omega u^2 dx},\quad \forall v\in H^1(\Omega)-\{0\}.$$

Honen arauera, (2.21) adierazpena honela idatz daiteke,

$$R(u_n)=\lambda_n,\ \forall\, n\in N$$

bereziki,

$$R(u_1)=\lambda_1.$$

Biz $v\in H^1(\Omega)-\{0\}$. Aurreko teoreman lorturikoari esker,

$$\exists\,(\alpha_n)\subset R\ /\ v=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n u_n$$

ondokoak izango ditugularik,

$$|v|^2=\int_\Omega v^2 dx=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$$

eta

$$(u_n,v)=\int_\Omega u_n v\,dx=\alpha_n.$$

Honelatan ba,

$$R(v)=\frac{a(v,v)}{|v|^2}=\frac{a(\sum\alpha_n u_n,v)}{\sum\alpha_n^2}=\frac{\sum\alpha_n a(u_n,v)}{\sum\alpha_n^2}$$

$$=\frac{\sum\alpha_n\lambda_n(u_n,v)}{\sum\alpha_n^2}=\frac{\sum\lambda_n\alpha_n^2}{\sum\alpha_n^2}\geq\lambda_1.$$

Hortaz, λ_1 lehen autobaliorako ondoko karakterizazioa dugu:

$$\lambda_1=\min_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ u\neq 0}}\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx+\varepsilon\int_\Gamma u^2 d\sigma}{\int_\Omega u^2 dx}$$

Kapitulu honetako 2.2.4 atalean, λ_1 lehen autobalio aren problema, beste ikuspegi batetatik aztertuko dugu. Karakterizazio berbera lortuko dugu, dena den, han egingo diren arrazonamenduak, aurrekoekin zeharo desberdinak izango dira.

Kontsidera dezagun λ_n autobalio bat eta $u_n \in H^1(\Omega)$ $u_n \neq 0$, berari dagokion autofuntzioa. Honako hau betetzen dute,

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v \, dx + \varepsilon \int_\Gamma u_n \cdot v \, d\sigma = \lambda_n \int_\Omega u_n \cdot v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Bereziki, $\varphi \in D(\Omega)$ bada, φ nulua izango da Γ gainean, hau da, $\gamma_0(\varphi)=0$, eta ondokoa beteko da:

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda_n \int_\Omega u_n \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

hau da,

(2.22) $\qquad -\Delta u_n = \lambda_n u_n$, $D'(\Omega)$-n (banaketen zentzuan).

Honelatan ba, $u_n \in H^1(\Omega)$ autofuntzioen laplacetarra ere $H^1(\Omega)$ espazioko elementua da.

2.2.2 <u>Aztarren-teorema.</u>

2.23. <u>Proposizioa.</u> (i) Biz $\Omega \subset R^N$, $N \geq 3$, ireki bornatu erregularra. Biz, halaber, $p \in [2N/N+2, +\infty]$. Kontsidera dezagun ondoko funtzioen multzoa:

$$E = \{ u \in H^1(\Omega) / \Delta u \in L^p(\Omega) \}.$$

Hauek honela izanik, existitzen da γ_1 E-tik $H^{-1/2}(\Gamma)$-rainoko eragile lineal jarraia, zeinak ondokoa betetzen duen,

$$\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial n}, \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Bestalde, ondoko Green-en formula betetzen da:

(2.24) $$\int_\Omega \Delta u \cdot v \, dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle \gamma_1(u), \gamma_0(v) \rangle, \forall u \in E, v \in H^1(\Omega)$$

(ii) $N=2$ deneko kasuan, emaitza berbera lortzen da $\forall p\in(1,+\infty]$.

Frogapena.

Biz $\|u\|_E = \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)}$. Erraz froga daitekeenez, $\|\cdot\|_E$ aplikazioa norma da E espazio bektorialean, eta $(E,\|\cdot\|_E)$ Banach-en espazioa da.

Halaber, karta lokalak erabiliz, $D(\bar\Omega)=C^\infty(\bar\Omega)$ $(E,\|\cdot\|_E)$ espazioan dentsoa dela froga daiteke, hau da,

$$\overline{D(\bar\Omega)}^{E}=E.$$

Biz $u\in C^\infty(\bar\Omega)$ eta ikus dezagun $\frac{\partial u}{\partial n}$-k $H^{-1/2}(\Gamma)$ espazioko elementu bat definitzen duela, hau da, $H^{1/2}(\Gamma)$ espazioaren dualeko elementua dela.

Biz $v\in H^{1/2}(\Gamma)$. Green-en formula aplikatuz ondokoa lortzen da:

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}.v\,d\sigma = \int_\Omega \Delta u\cdot w\,dx + \int_\Omega \nabla u.\nabla w\,dx,\ \forall w\in H^1(\Omega)/\gamma_0(w)=v.$$

Bereziki, $w=l_\Omega(v)$ aukeratzen badugu,

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}.v\,d\sigma = \int_\Omega \Delta u\cdot l_\Omega(v)\,dx + \int_\Omega \nabla u.\nabla(l_\Omega(v))\,dx$$

Honelatan ba,

$$\left|\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}.v\,d\sigma\right| \leq \left|\int_\Omega \Delta u\cdot l_\Omega(v)\,dx\right| + \left|\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla(l_\Omega(v))\,dx\right|$$

$$\leq \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)}\|l_\Omega v\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega)]^N}\|\nabla(l_\Omega v)\|_{[L^2(\Omega)]^N}$$

$$\leq \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)}\cdot C\,\|l_\Omega(v)\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega)}$$

zeren eta N eta p enuntziatuaren baldintzetan badaude, $H^1(\Omega)$-tik $L^{p'}(\Omega)$-rainoko injekzioa jarraia da p', p-ren konjokatua izanik.

Beraz, ondokoa frogatu dugu:

$$\left|\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}v\,d\sigma\right| \leq \max(1,C)\,\|l_\Omega(v)\|_{H^1(\Omega)}\|u\|_E.$$

baina 0.kapituluan ikusten genuen moduan,

$$\exists c_1 \,/\, \|\ell_\Omega(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad , \forall v \in H^{1/2}(\Gamma)$$

beraz,

$$\left|\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma\right| \leq \max(1,c) c_1 \cdot \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|u\|_E .$$

Honelatan ba, $\forall u \in D(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ $H^{-1/2}(\Gamma)$ espazioko elementua da eta ondokoa betetzen da:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \max(1,c) c_1 \|u\|_E .$$

Hortaz, $\frac{\partial \cdot}{\partial n}$ aplikazio lineal jarraia, dentsitatez, E espazio osoan definituriko γ_1 aplikazio lineal jarrai batetara heda daiteke,

$$\gamma_1 : E \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma).$$

Ikus dezagun azkenik, Green-en formula betetzen dela. Biz $u \in E$ eta $v \in H^{1/2}(\Gamma)$. Kontsidera dezagun $(u_n) \subset D(\bar{\Omega})$ zeinak u-rantz jotzen duen E espazioan. Hortaz, $\gamma_1(\cdot)$ funtzioaren definizioaz, $\gamma_1(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial n}$. Beraz,

$$\langle \gamma_1(u), v\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial n}, v\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma \frac{\partial u_n}{\partial n} \cdot v \, d\sigma =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_\Omega \Delta u_n \cdot w \, dx + \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla w \, dx \right\} =$$

$$= \int_\Omega \Delta u \cdot w \, dx + \int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx \,,\ \forall w \in H^1(\Omega) / \gamma_0(w) = v.$$

2.25.Oharra. $u \in C^2(\bar{\Omega})$ denean, $u \in E$ da eta kasu honetan ere, $\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial n}$, oso erraz froga daitekeenez.

$u \in C^2(\bar{\Omega})$ eta $v \in H^1(\Omega)$ direnean Green-en formula aplikagarria da, beraz,

$$\int_\Omega \Delta u \cdot v \, dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, d\sigma$$

eta (2.24) berdintza kontutan izanik, $\gamma_1(u)=\frac{\partial u}{\partial n}$ dela dugu.

2.2.3 Formulazio sendoa.

2.2.1 atalean ikusten genuenez,

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v \, dx + \varepsilon \int_\Gamma u_n v \, d\sigma = \lambda_n \int_\Omega u_n \cdot v \, dx, \forall n \in \mathbb{N}, \forall v \in H^1(\Omega)$$

eta honen ondorio modura,

$$-\Delta u_n = \lambda_n u_n, \forall n \in N, D'(\Omega)\text{-n}$$

beraz, kasu honetan 2.23 proposizioa aplikagarria da eta Green-en formula erabiliz ondokoa dugu:

$$-\int_\Omega \Delta u_n \cdot v \, dx + \langle \gamma_1(u_n), v \rangle + \varepsilon \int_\Gamma u_n \cdot v \, d\sigma = \lambda_n \int_\Omega u_n v \, dx, \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Bestalde, $D(\Omega)$ $L^2(\Omega)$-n dentsoa denez gero,

$$-\int_\Omega \Delta u_n \cdot v \, dx = \lambda_n \int_\Omega u_n v \, dx \ , \forall v \in L^2(\Omega)$$

bereziki, $\forall v \in H^1(\Omega)$.

Honelatan ba,

$$\langle \gamma_1(u_n), v \rangle + \varepsilon \langle \gamma_0(u_n), v \rangle = 0, \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

hau da,

$$\langle \gamma_1(u_n), w \rangle + \varepsilon \langle \gamma_0(u_n), w \rangle = 0, \ \forall w \in H^{1/2}(\Gamma)$$

hots,

$$\gamma_1(u_n) + \varepsilon \gamma_0(u_n) = 0, \ H^{-1/2}(\Gamma)\text{-n}.$$

Hortaz, gure λ_n autobalioak eta u_n autofuntzioak ondokoa betetzen dute:

$$\begin{cases} -\Delta u_n=\lambda_n u_n & ,D'(\Omega)\text{-n.} \\ \gamma_1(u_n)+\varepsilon\gamma_0(u_n)=0, H^{-1/2}(\Gamma)\text{-n.} \end{cases}$$

Ikus dezagun azkenik, u_n autofuntzioak erregularrak direla eta honen arauera, aurreko berdintzak nonnahi ematen direla.

2.26. Proposizioa. u_n autofuntzioak erregularrak dira, hau da, $C^2(\overline{\Omega})$ espaziokoak.

Frogapena.

Funtzio propioen erregulartasuna frogatzeko, ondoko emaitzak erabiliko ditugu:

(i) Sobolev-en injekzioak (ikus 0.kapitulua).

(ii) Agmon-Douglis-Niremberg-en (A.D.N.) emaitzak (ikus (2)).

(iii) Schauder-en emaitzak (ikus (9)).

$u\in H^1(\Omega)$ aurreko problemaren autofuntzioa bada, ondokoak betetzen ditu:

$$-\Delta u=\lambda u, D'(\Omega)\text{-n.}$$
$$\gamma_1(u)+\varepsilon\gamma_0(u)=0, H^{-1/2}(\Gamma)\text{-n.}$$

u funtzioa $H^1(\Omega)$-n dagoenez, $\gamma_0(u)$ $H^{1/2}(\Gamma)$-n dago beraz, $\gamma_1(u)=-\varepsilon\gamma_0(u)$ ere $H^{1/2}(\Gamma)$-n dago.

Bestalde, λu $L^2(\Omega)$-n dago, beraz, $\Delta u\in L^2(\Omega)$. Honelatan ba, A.D.N.-ren emaitza aplikatzeko baldintzetan gaude eta u $H^2(\Omega)$-n dagoela dugu.

Sobolev-en injekzioak aplikatuz ondokoa lortzen da,

$$u\in L^q(\Omega), 2\leqslant q\leqslant 2N/N-4, N>4 \text{ denean.}$$

$$u\in L^q(\Omega), 1\leqslant q\leqslant +\infty, N\leqslant 4 \text{ denean.}$$

A.D.N.-ren emaitza berriz aplikaturik ondokoa lortzen da,

$u\in W^{2,q}(\Omega)$, $2\leq q\leq 2N/N-4$, $N>4$.

$u\in W^{2,q}(\Omega)$, $1\leq q\leq +\infty$, $N\leq 4$.

Prozesu hau, edozein N-tarako, aldi-kopuru finitu batetan errepikatuz, $u\in W^{2,q}(\Omega)$, $q>N/2$ lortzen da. Beraz, Sobolev-en injekzioei esker,

$$u\in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}),\ 0<\alpha<2-N/q.$$

eta Schauder-en emaitza erabiliz, $u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0<\alpha<2-N/q$, bereziki, $u\in C^{2}(\bar{\Omega})$. $\rfloor$

Hortaz, $-\Delta u_n-\lambda_n u_n=0$, $D'(\Omega)$-n denez gero, eta $u_n\in C^2(\bar{\Omega})$, $-\Delta u_n-\lambda_n u_n$ funtzioa jarraia da eta $-\Delta u_n-\lambda_n u_n=0$, Ω-n.

Bestalde, $\gamma_1(u_n)=\frac{\partial u_n}{\partial n}$ eta $\gamma_0(u_n)=u_n$, beraz,

$$\frac{\partial u_n}{\partial n}+\varepsilon u_n=0\ ,\quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\text{-n}$$

hau da,

$$\int_\Gamma \frac{\partial u_n}{\partial n} v\, d\sigma+\varepsilon\int_\Gamma u_n v\, d\sigma=0,\ \forall v\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

eta $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ espazioa $L^2(\Gamma)$-n dentsoa denez gero,

$$\frac{\partial u_n}{\partial n}+\varepsilon u_n=0\ ,\quad \text{i.n. } \partial\Omega\text{-n}$$

eta $\frac{\partial u_n}{\partial n}+\varepsilon u_n$ funtzioa Γ-n jarraia dela kontutan badugu,

$$\frac{\partial u_n}{\partial n}+\varepsilon u_n=0\ ,\quad \Gamma\text{-n.}$$

Honelatan ba, ondoko teorema frogatuta geratzen da.

2.27. Teorema. (2.17)-(2.18) problemaren autobalioak positiboak dira, eta $+\infty$-rantz jotzen duen segida gorakor bat osotzen dute,

$$0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n\leq\cdots$$

Bestalde, autobalioei dagozkien autofuntzioak erregularrak dira,hots, $C^2(\bar{\Omega})$ espaziokoak,eta $u_n \in C^2(\bar{\Omega})$ autofuntzioen bidez osoturiko (u_n) $L^2(\Omega)$ espazioko oinarri ortonormala existitzen da.

2.2.4 λ_1 lehen autobalioaren karakterizazioa.

(2.21) adierazpenean ikusten genuenez, u_n autofuntzioak eta λ_n balio propioak ondoko berdintza betetzen dute:

$$\lambda_n = \frac{\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \varepsilon \int_\Gamma u_n^2 \, d\sigma}{\int_\Omega u_n^2 \, dx} \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

bereziki,

$$\lambda_1 = \frac{\int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx + \varepsilon \int_\Gamma u_1^2 \, d\sigma}{\int_\Omega u_1^2 \, d\sigma}$$

Ikus dezagun orain, λ_1 lehen autobalioa nola karakteriza daitekeen modu eroso batean.

Kontsidera dezagun ondoko zenbaki erreala,

(2.28) $$\mu = \inf_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_\Gamma u^2 d\sigma \right\}$$

Argi dagoenez, $\mu \geq 0$.

Plantea dezagun ondoko problema:

"$u \in H^1(\Omega)$ funtzioak aurkitzea, zeintzutarako honako hau betetzen den:

(2.29) $$\mu = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_\Gamma u^2 d\sigma$$

$\int_\Omega u^2 dx = 1$ izanik."

2.30.<u>Teorema</u>. (2.29) problemak ebazpen bat du gutxienez, hortaz, μ zenbakiak ondokoa betetzen du:

(2.31) $$\mu = \min_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_\Gamma u^2 d\sigma \right\}$$

<u>Frogapena.</u>

μ zenbakiaren (2.28) definizioaz ondokoa dakigu:

$$\exists\ (u_n) \subset H^1(\Omega) \,/\, \mu = \lim_{n\to+\infty} \left\{ \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \varepsilon \int_\Gamma u_n^2\, d\sigma \right\}.$$

$\int_\Omega u_n^2 dx = 1$ izanik, $\forall n \in N$.

(u_n) segida $H^1(\Omega)$ espazioan bornatua da eta $H^1(\Omega)$ espazioa erreflexiboa denezgero, (u'_n) azpisegida ahulki konbergente bat existituko da. Biz $u \in H^1(\Omega)$, azpisegida honen limite ahula.

$H^1(\Omega)$-tik $L^2(\Omega)$-rainoko injekzioa trinkoa denez gero, (u'_n) segida u-rantz sendoki konbergentea izango da $L^2(\Omega)$ espazioan.

Bestalde, $(\gamma_0(u'_n)) \subset H^{1/2}(\Gamma)$ aztarren-segida ahulki konbergentea izango da $H^{1/2}(\Gamma)$-n eta $H^{1/2}(\Gamma)$-tik $L^2(\Gamma)$-rainoko injekzioa trinkoa denez gero, $(\gamma_0(u'_n))$ sendoki konbergentea izango da $L^2(\Gamma)$-n, beraren limitea $\gamma_0(u)$ delarik.

Honelatan ba, $(u'_n) \subset H^1(\Omega)$ segidak ondokoak betetzen ditu:

(2.32) $$\mu = \lim_{n\to+\infty} \left\{ \int_\Omega |\nabla u'_n|^2 dx + \varepsilon \int_\Gamma u'^2_n\, d\sigma \right\}, \quad \int_\Omega u'^2_n\, dx = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(2.33) $$u'_n \rightharpoonup u \quad H^1(\Omega), \ H^1(\Omega)\text{-ren topologia ahularekiko.}$$

(2.34) $$u'_n \rightarrow u, \ L^2(\Omega)\text{-n}.$$

(2.35) $$\gamma_0(u'_n) \rightarrow \gamma_0(u), \ L^2(\Gamma)\text{-n}.$$

(2.34) adierazpenetik ondokoa dugu:

(2.36) $$\int_\Omega u^2 dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u'^2_n\, dx = 1$$

eta (2.35)-tik,

(2.37) $$\int_\Gamma u^2 d\sigma = \lim_{n\to+\infty} \int_\Gamma u'^2_n\, d\sigma.$$

Bestalde,

$$\int_\Omega |\nabla \cdot|^2 dx : H^1(\Omega) \longrightarrow R/$$
$$u \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

funtzioa, behetik erdijarraia da $H^1(\Omega)$-ren topologia ahularekiko, hortaz,

(2.38) $$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx$$

(2.33) adierazpena kontutan izanik.

(2.36),(2.37) eta (2.38) azken emaitza hauek bildurik, ondokoa dugu:

$$u \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega u^2 dx = 1$$

eta

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_\Gamma u^2 d\sigma \leq \liminf_{n\to+\infty} \left\{ \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \varepsilon \int_\Gamma u_n^2 d\sigma \right\} = \mu .$$

Beraz, μ zenbakiaren definizioaz,

$$\mu = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_\Gamma u^2 d\sigma \quad , \quad \int_\Omega u^2 dx = 1$$

hortaz,

$$\mu = \min_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_\Gamma u^2 d\sigma \right\}$$

2.39. Korolarioa. μ zenbakia positiboa da, hau da, $\mu > 0$.

Frogapena.

Suposa dezagun, $\mu = 0$ dela. Hau honela izanik, existituko da $u \in H^1(\Omega)$ zeinetarako

$$\int_\Omega u^2 dx = 1 \, , \quad \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_\Gamma u^2 d\sigma = 0$$

diren.

Hortaz, $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 0$, beraz, u=ktea. Bestalde, $\int_\Gamma u^2 d\sigma = 0$, beraz, $\gamma_0(u) = 0$. Honelatan ba, u=0, $\int_\Omega u^2 dx = 1$ baldintzaren kontra doalarik.

2.40.Teorema. μ zenbakia (2.17)-(2.18) problemaren lehen autobalioa da, hau da, $\lambda_1=\mu$. Bestalde, (2.29) problemaren ebazpenak, μ-ri dagozkion funtzio propioak dira.

Honetaz gain, $u\in H^1(\Omega)$ funtzioa μ autobalioari dagokion funtzio propioa bada, $w=\|u\|^{-1}_{L^2(\Omega)}u$ funtzioa (2.29) problemaren ebazpena da.

Frogapena.

(i) Bira $u\in H^1(\Omega)$ (2.29) problemaren ebazpen bat eta $\phi\in H^1(\Omega)$.

$\|u\|^2_{L^2(\Omega)}=1$ denez gero, $t\in R$ nahiko txikia denean, $\|u+t\phi\|_{L^2(\Omega)}>0$ da.

Biz $v=(u+t\phi)/\|u+t\phi\|_{L^2(\Omega)}$ $H^1(\Omega)$ espazioko funtzioa. Argi dagoenez, $\|v\|_{L^2(\Omega)}=1$, beraz, μ zenbakiaren definizioaz,

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \varepsilon\int_\Gamma v^2 d\sigma \geq \mu$$

Honelatan ba,

$$\int_\Omega |\nabla(u+t\phi)|^2 dx + \varepsilon\int_\Gamma (u+t\phi)^2 d\sigma \geq \mu\,\|u+t\phi\|^2_{L^2(\Omega)}$$

hau da,

$$\int_\Omega \{|\nabla u|^2+t^2|\nabla\phi|^2+2t\nabla u\cdot\nabla\phi\}\,dx + \varepsilon\int_\Gamma \{u^2+t^2\phi^2+2tu\phi\}\,d\sigma \geq$$
$$\geq \mu\cdot\int_\Omega \{u^2+t^2\phi^2+2tu\phi\}\,dx$$

eta $\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma u^2d\sigma=\mu\cdot\int_\Omega u^2dx=\mu$ denez gero, honako hau lortzen da,

(2.41) $$t^2\int_\Omega|\nabla\phi|^2dx+2t\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla\phi\,dx+\varepsilon t^2\int_\Gamma\phi^2d\sigma+2\varepsilon t\int_\Gamma u\phi\,d\sigma \geq$$
$$\geq \mu\cdot\left\{t^2\int_\Omega\phi^2dx+2t\int_\Omega\phi u\,dx\right\}$$

$t>0$ deneko kasuan, azken adierazpen hau t-z zatituz eta $t\to 0+$ doaneko limitera eramanez, honako hau lortzen da:

$$2\int_\Omega \nabla\phi\nabla u\,dx + 2\varepsilon\int_\Gamma \phi u\,d\sigma \geqslant 2\mu\int_\Omega u\phi\,dx$$

hau da,

(2.42) $$\int_\Omega \nabla\phi\nabla u\,dx + \varepsilon\int_\Gamma u\phi\,d\sigma \geqslant \mu\int_\Omega u\phi\,dx, \forall\phi\in H^1(\Omega).$$

$t<0$ deneko kasuan, t-z zatituz eta $t\to 0^-$ doaneko limitera eramanez, ondokoa lortzen da:

(2.43) $$\int_\Omega \nabla u\nabla\phi\,dx + \varepsilon\int_\Gamma u\phi\,d\sigma \leqslant \mu\cdot\int_\Omega u\phi\,dx, \ \forall\phi\in H^1(\Omega)$$

(2.42) eta (2.43) adierazpenetatik hauxe dugu:

(2.44) $$\int_\Omega \nabla u\nabla\phi\,dx + \varepsilon\int_\Gamma u\phi\,d\sigma = \mu\int_\Omega u\phi\,dx, \ \forall\phi\in H^1(\Omega).$$

Beraz, $u\in H^1(\Omega)$ funtzioa eta μ zenbakia (2.17)-(2.18) problemaren formulazio bariazionalaren ebazpenak dira, eta 2.2.3 ataleko erregulartasunari buruzko arrazonamenduei jarrituz, $u\in C^2(\bar\Omega)$ izango dugu eta (μ,u) bikotea (2.17)-(2.18) problemaren ebazpena izango da. Hortaz, u μ autobalioari dagokion funtzio propioa da.

Honelatan ba, μ autobalioa denez gero, 2.27 teoremaren arauera hauxe dugu:

$$\exists\, \bar n\in N/\lambda_{\bar n} = \mu.$$

Dakigunez,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \varepsilon\int_\Gamma u^2 d\sigma \geqslant \mu, \ \forall u\in H^1(\Omega)\,/\int_\Omega u^2dx = 1$$

beraz, $\forall\, u\in H^1(\Omega)$, $v=u/\|u\|_{L^2(\Omega)}$ funtzioa kontsideratuz, ondokoa dugu:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon\int_\Gamma u^2 d\sigma \geqslant \mu\int_\Omega u^2 dx$$

hau da,

$$\mu \leqslant \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \varepsilon\int_\Gamma u^2 d\sigma}{\int_\Omega u^2 dx}, \ \forall u\in H^1(\Omega)-\{0\}.$$

Beraz,(2.21) adierazpenari esker, $\mu\leq\lambda_n$, $\forall n\in N$, honelatan ba, $\mu=\lambda_1$.

(ii) $u\in H^1(\Omega)$ μ autobalioari dagokion funtzio propioa bada, erregulartasunari buruzko arrazonamenduei esker, u erregularra da, hau da, $u\in C^2(\bar{\Omega})$ eta ondoko berdintza betetzen da,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon\int_\Gamma u^2 d\sigma = \mu.\int_\Omega u^2 dx$$

hortaz, $w=\|u\|^{-1}_{L^2(\Omega)}u$ funtzioak hauxe beteko du:

$$\mu=\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + \varepsilon\int_\Gamma w^2 d\sigma$$

(2.29) problemaren ebazpena delarik.

2.45. Korolarioa. λ_1 (2.17)-(2.18) problemaren lehen autobalioak honako hau betetzen du:

$$\lambda_1=\min_{u\in H^1(\Omega)-\{0\}}\left\{\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon\int_\Gamma u^2 d\sigma\right)\Big/\int_\Omega u^2 dx\right\}.$$

honelatan ba,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon\int_\Gamma u^2 d\sigma \geq \lambda_1\int_\Omega u^2 dx\ ,\ \forall u\in H^1(\Omega).$$

2.3.- MUGAKO BALDINTZA NEUMANN-ENA DENEKO LAPLACETARRAREN FUNTZIO ETA BALIO PROPIO LINEALAK.

Kontsidera dezagun mugako baldintza Neumann-ena deneko laplacetarraren funtzio eta balio propio linealen problema:

(2.46) $\qquad -\Delta u=\lambda u\ ,\ \Omega$-n.

(2.47) $\qquad \frac{\partial u}{\partial n}=0\ ,\ \Gamma$-n.

$\Omega\subset R^N$ ireki bornatu erregularra delarik.

Problema honen formulazio bariazionala hauxe da:

"$\lambda\in R$ balioak aurkitzea, zeintzutarako ondoko baldintza betetzen duten $u\in H^1(\Omega)$ funtzioak existitzen diren:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \lambda \int_{\Omega} u v \, dx, \forall v \in H^1(\Omega).$$

2.2 ataleko arrazonamenduei jarraituz ondokoak lortzen dira:

"(2.46)-(2.47) problemaren autobalioak ez-negatiboak dira eta $+\infty$-rantz jotzen duen segida gorakor bat osotzen dute.Beraiei dagozkien autofuntzioak $C^2(\bar{\Omega})$ espaziokoak dira eta existitzen da $(u_n) \subset C^2(\bar{\Omega})$ autofuntzioen bidez osoturiko $L^2(\Omega)$ espazioko oinarri ortonormala.

Kasu honetan, λ_1 lehen autobalioa nulua da,hau da,$\lambda_1=0$,berari dagokion autofuntzioa $u=1$ izan daitekeelarik."

Bestalde,2.2.4 atalean lorturiko λ_1 lehen autobaliorako karakterizazioa bistakoa da zeren eta,

$$0=\lambda_1= \min_{u \in H^1(\Omega)-\{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

Kontsidera dezagun orain,$(\varepsilon_n) \subset R^+$ 0-rantz jotzen duen segida beherakor bat.Kontsidera dezagun,halaber, ε_n zenbakiari dagokion (2.17)-(2.18) problema eta beronen lehen autobaliorako lorturiko kakterizazioa:

$$\lambda_1(\varepsilon_n)= \min_{u \in H^1(\Omega)-\{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_{\Gamma} u^2 d\sigma}{\int_{\Omega} u^2 dx}$$

Argi ikusten denez, $(\lambda_1(\varepsilon_n))$ autobalioen segida, 0-rantz edo (2.46)-(2.47) problemaren lehen autobaliorantz jotzen duen segida beherakorra da.Hau da,

$$\lim_{n\to+\infty} \downarrow \lambda_1(\varepsilon_n)=\lambda_1=0.$$

Erreferentzia zabalagoak izateko,ikus (6).

2.4.-OSAGARRIAK.

Biz Γ_0 Ω irekiaren mugaren azpimulzoa, zeinaren neurria positiboa den. Biz, halaber, $\Gamma_1=\partial\Omega-\Gamma_0$.

Mugako baldintza zeiharra eta Neumann-ena deneko laplacetarraren autobalioen problema aztertu dugun moduan ondokoa ere azter daiteke.

(2.48) $$-\Delta u=\lambda u,\ \Omega\text{-n}.$$

(2.49) $$u=0\ ,\ \Gamma_1\text{-en}.$$

(2.50) $$\frac{\partial u}{\partial n}+\varepsilon u=0,\quad \Gamma_0\text{-n}.$$

Kontsidera dezagun $H^1(\Omega)$-ren ondoko azpiespazioa

$$V=\left\{u\in H^1(\Omega)\ /\ u=0\ \Gamma_1\text{-en}\right\}.$$

Bistakoa denez, (2.48)-(2.49)-(2.50) autobalio-problemaren planteamendu bariazionala ondokoa da:

"$\lambda\in R$ balioak aurkitzea, zeintzutarako ondoko baldintza betetzen duten $u\in V$ funtzioak existitzen diren:

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v\,dx+\varepsilon\int_{\Gamma_0} uv\,d\sigma=\lambda\int_\Omega uv\,dx \qquad ,\forall v\in V."$$

2.2. atalekoen antzekoak diren arrazonamenduak eginez, hurrengo ondorioak lortzen dira:

"Aurreko problemaren autobalioak positiboak dira eta $+\infty$-rantz jotzen duen segida gorakor bat osotzen dute,

$$0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\ \ldots\ldots\ldots\leq\lambda_n\leq\ldots$$

Honetaz gain, badago $(u_n)\subset C^2(\overline{\Omega})$ $L^2(\Omega)$ espazio ko oinarri ortonormala osotzen duen autofuntzioen segida bat".

Bestalde, Rayleigh-en zatiduraren bidez, λ_1 lehen autobakiorako ondoko karakterizazioa lortzen da:

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u\in V\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_{\Gamma_0} u^2 d\sigma}{\int_\Omega u^2 dx} \tag{2.51}$$

Aurrerantzean,ondoko notazioak erabiliko ditugu:

λ_1^D : Laplacetarraren lehen autobalioa,mugako baldintza Direchlet-ena denean.

λ_1^N : Laplacetarraren lehen autobalioa, mugako baldintza Neumann-ena denean.

λ_1^Z : Laplacetarraren lehen autobalioa, mugako baldintza zeiharra denean.

λ_1^n : Aurreko problemaren lehen autobalioa.

Beraientzat ditugun karakterizazioak kontutan izanik, ondoko desberdintzak nabariak dira:

$$0=\lambda_1^N < \lambda_1^Z \leqslant \lambda_1^n \leqslant \lambda_1^D$$

Bestalde, $\Omega_1 \subset \Omega$ bada. Oso erraz froga daiteke Rayleigh-en zatidurak erabiliz ezen,

$$\lambda_1^D(\Omega) \leqslant \lambda_1^D(\Omega_1).$$

Maximoaren printzipioa erabiliz eta laplacetarraren lehen autofuntzioa zeinu bakarrekoa dela kontutan izanik ondokoa ere froga daiteke:

$$\Omega_1 \subsetneq \Omega \Rightarrow \lambda_1^D(\Omega) < \lambda_1^D(\Omega_1).$$

3.KAPITULUA.

MUGAKO BALDINTZA ZEIHARRA DUTENEKO PROBLEMA ELIPTIKO ERDILINEALEN AZTERKETA.

3.1 Problemaren planteamendua.

3.2 Ebazpenen positibotasunarekiko zenbait kontsiderazio.

3.3 Ebazpenen existentzi teoremaren frogapena.

3.3.1 Formulazio bariazionala. Frogapenaren eskema.

3.3.2 (A) baldintzaren frogapena.

3.3.3 (B) baldintzaren frogapena.

3.3.4 (C) baldintzaren frogapena.

3.3.5 (D) baldintzaren frogapena.

3.3.6 S_{ε} funtzionalaren puntu kritikoaren erregulartasuna.

3.4 Ondorio gisa.

3.MUGAKO BALDINTZA ZEHIARRA DUTENEKO PROBLEMA ELIPTIKO ERDILINEALEN AZTERKETA.

3.1.-PROBLEMAREN PLANTEAMENDUA.

Biz $\Omega \subset R^N, N \geq 3$, ireki bornatu konexu erregularra, beraren muga $\partial\Omega = \Gamma$ delarik.

Bira, halaber, $\varepsilon > 0$ eta R-tik R-rainoko f funtzio bat.

Kapitulu honetan, ondoko (3.1)-(3.2) problema eliptiko erdilinealaren ebazpenen existentzia aztertuko dugu:

(3.1) $\qquad -\Delta u = f(u) \quad , \Omega$-n.

(3.2) $\qquad \frac{\partial u}{\partial n} + \varepsilon u = 0 \quad , \Gamma$-n.

1.kapituluan ikusitako puntu kritikoei buruzko emaitza erabiliz, f funtzioak zenbait baldintza betetzen dituenean, (3.1)-(3.2) problemak gutxienez ebazpen erregular bat duela ikusiko dugu.

Kapitulu honen helburua, ondoko 3.3.teorema frogatzea izango da.

3.3.Teorema(Ebazpenen existentzi teorema).

f funtzioak ondoko (f_1)-(f_5) baldintzak betetzen baditu, (3.1)-(3.2) problemaren C^2 klaseko ebazpen bat existitzen da gutxienez.

(f_1) f lokalki lipschitzearra da.

(f_2) $f(0)=0$ eta $l = \overline{\lim_{|t|\to 0}} \frac{f(t)}{t} < \lambda_1$.

λ_1 zenbakia, $\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \Omega\text{-n.} \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \varepsilon u = 0 \ , \Gamma\text{-n.} \end{cases}$ problemaren lehen autobalioa izanik.

(f_3) $\exists M \geq 0, \theta \in [0, ½) / \ G(z) \leq \theta z g(z), \forall z \in R: |z| \geq M.$

$g(z)=f(z)-lz$, $\forall z\in R$ eta $G(z)=\int_0^z g(s)ds, \forall z\in R$

direlarik.

(f_4) $\exists s\in[1,N+2/N-2), k_1,k_2>0$ / $|f(z)|\leq k_1+k_2|z|^s, \forall z\in R$.

(f_5) $\underline{\lim}_{s\to\infty}\, g(s)/s>0$

3.2.-EBAZPENEN POSITIBOTASUNARI BURUZKO ZENBAIT KONTSIDERAZIO.

Suposa dezagun 3.3.Teorema frogatuta dugula. Biz $(f_1)-(f_5)$ baldintzak betetzen dituen funtzio bat, eta ikus dezagun (3.1)-(3.2) problemaren ebazpena ez-negatiboa aukera daitekeela.

Kontsidera ditzagun ondoko funtzioak:

$$\bar{g}(s)=\begin{cases} g(s), & s\geq 0 \text{ denean.} \\ 0 & , s\leq 0 \text{ denean.}\end{cases}$$

eta $\bar{G}(z)=\int_0^z \bar{g}(s)ds$, $\forall z\in R$.

Biz , halaber, $\bar{f}(z)=\bar{g}(z)+lz$, $\forall z\in R$.

Kontsidera dezagun ondoko problema:

(3.4) $$-\Delta u=\bar{f}(u),\ \Omega\text{-n.}$$

(3.2) $$\frac{\partial u}{\partial n}+\varepsilon u=0 \quad , \Gamma\text{-n.}$$

Nabaria denez, problema hau ere 3.3.Teoremaren baldintzetan dago, hau da, $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{G}$ funtzioek $(f_1)-(f_5)$ baldintzak betetzen dituzte. Beraz, (3.4)-(3.2) problemak ebazpen ez-nulu erregular bat edukiko du gutxienez.

3.5.Proposizioa. $\bar{u}\in C^2(\bar{\Omega})$ funtzioa (3.4)-(3.2) problemaren ebazpena bada, ondokoak betetzen ditu:

(a) $\bar{u}(x)\geq 0$, $\forall x\in\Omega$.

(b) $\overline{u}$ funtzioa (3.1)-(3.2) problemaren ebazpena da.

Frogapena.

(a) Suposa dezagun (a) ez dela betetzen, hau da, $\exists x\in\Omega /\ \overline{u}(x)<0$.

Kontsidera dezagun ondoko multzoa:

$$\Omega_1=\{x\in\Omega /\ \overline{u}(x)<0\}.$$

(a) betetzen ez denez gero, Ω_1 ez-hutsa izango da.

Egoera bi hauek bereiztuko ditugu:

(i) kasua. $\overline{\Omega_1}\subset\Omega$.

$\overline{\Omega_1}\subset\Omega$ dugunez gero, $\Gamma_1=\partial\Omega_1\subset\{x\in\Omega /\ \overline{u}(x)=0\}$. Beraz, $\overline{u}$ funtzioak ondokoak betetzen ditu:

$$-\Delta\overline{u}=1\overline{u},\ \Omega_1\text{-en.}$$

$$\overline{u}=0\ ,\ \Gamma_1\text{-en.}$$

$\overline{u}<0$ dela kontutan badugu (Ω_1-en) eta hortaz, $\overline{f}(\overline{u}(x)=1\overline{u}(x)$, $\forall x\in\Omega_1$.

Honelatan ba, 1 balioa laplacetarraren autobalioa da Ω_1 irekian, mugako baldintza Direchlet-ena delarik.

Bestalde, 3.3.Teoremako (f_2) baldintzari esker, $1<\lambda_1$, λ_1 mugako baldintza zeiharra deneko lehen autobalioa izanik Ω irekian.

Hortaz, kontraesana dugu, zeren eta:

$$1<\lambda_1^Z(\Omega)\leq\lambda_1^D(\Omega)\leq\lambda_1^D(\Omega_1)$$

1 balioa laplacetarraren autobalioa izatearen kontra doalarik, mugako baldintza Dirichlet-ena denean Ω_1 irekian.

Beraz, (i) kasu hau ezinezkoa da.

(ii) kasua. $\overline{\Omega}_1\not\subset\Omega$.

$\overline{\Omega_1} \not\subset \Omega$ dugu, beraz, kasu honetan, $\Gamma \cap \Gamma_1 = \Gamma_0 \neq$.
Honelatan ba, $\bar{u}$ funtzioa Ω_1 irekian negatiboa denez gero, betetzen dituen mugako baldintzak kontutan izanik, ondoko problemaren ebazpena dela izango dugu

$$-\Delta\bar{u}=1\bar{u},\ \Omega_1\text{-en.}$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}+\varepsilon\bar{u}=0\ ,\ \Gamma_0\text{-n.}$$

$$\bar{u}=0\ ,\Gamma_1-\Gamma_0\text{-n.}$$

Beraz, 1 balioa mugako baldintza nahasia deneko laplacetarraren autobalioa da.

Bestalde, 3.3.Teoremaren (f_2) baldintzari esker, $1<\lambda_1$ dela dakigu, λ_1 mugako baldintza zeiharra deneko laplacetarraren lehen autobalioa izanik.

Kontsidera dezagun ondoko autobalio-problema:

$$-\Delta u=\lambda u,\ \Omega\text{-n.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\varepsilon u=0\ ,\ \Gamma_0\text{-n.}$$

$$u=0\ ,\Gamma-\Gamma_0\text{-n.}$$

Rayleigh-en zatiduraren bidez lorturiko karakterizazioak erabiliz, ondokoa lor daiteke:

$$\lambda_1^n(\Omega)\leqslant\lambda_1^n(\Omega_1)$$

Honelatan ba, ondokoak ditugu:

$$1<\lambda_1^z(\Omega)\leqslant\lambda_1^n(\Omega)\leqslant\lambda_1^n(\Omega_1)$$

1 balioa mugako baldintza nahasia deneko laplacetarraren autobalioa izatearen kontra (Ω_1-en) doalarik.

Hortaz, halabeharrez, (ii) kasua ere ezinezkoa denez gero, $\bar{u}$ ebazpena ez-negatiboa izango da.

(b) $\bar{u}(x)\geq 0$ denez gero $\forall x\in\Omega$, $\bar{f}(\bar{u}(x))=f(\bar{u}(x))$, $\forall x\in\Omega$. Honelatan ba, $\bar{u}$ funtzioa (3.1)-(3.2) problemaren ebazpena da.

3.3.-EBAZPENEN EXISTENTZI TEOREMAREN FROGAPENA.

Aurreko atalean ikusitakoari esker, gure problemaren ebazpen ez-negatibo bat lortzeko, nahikoa izango da 3.3.Teorema frogatzea.

Teorema honen frogapenean, P.H.Rabinowitz-en metodoari jarraituko gatzaizkio.

Lehendabiziko pausoa, problemaren Formulazio Bariazionala aurkitzea izango da.

Bigarrenik, funtzional bat definitu beharko dugu zeinaren puntu kritikoak gure problemaren Planteamendu Bariazionalaren ebazpenak izango diren.

Funtzional hau definitu ondoren, mendilepoaren teoremaren bidez, puntu kritiko bat gutxienez duela ikusi beharko da.

Azkenik, Formulazio Bariazionalaren lorturiko ebazpenak erregularrak direla ikusiko dugu.

3.3.1 Formulazio Bariazionala. Frogapenaren eskema.

Lehenik, Formulazio Bariazionala lortu aurretik, (3.1)-(3.2) ekuazioa modu egoki batetan idatziko dugu.

$f(z)=g(z)+lz$ denez gero, (3.1)-(3.2) problema honela idatz daiteke:

(3.5) $$-\Delta u - lu = g(u), \Omega\text{-n.}$$

(3.2) $$\frac{\partial u}{\partial n} + \varepsilon u = 0 \quad , \Gamma\text{-n.}$$

Ikus dezagun zein den problema honen formulazio bariazionala.

Biz $v \in H^1(\Omega)$, (3.5) berdintzan v-z biderkatuz eta Ω irekian integraturik, ondokoa dugu:

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx - l \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} g(u) v \, dx$$

eta Green-en formula aplikaturik,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, d\sigma - l \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} g(u) v \, dx$$

(3.2) mugako baldintza kontutan izanik,

$$\int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, dx + \varepsilon \int_{\Gamma} uv \, d\sigma - l \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} g(u) v \, dx.$$

Beraz, (3.1)-(3.2) problemaren formulazio bariazionala hauxe da:

"$u \in H^1(\Omega)$ funtzioak aurkitzea, zeintzutarako ondoko (3.6) baldintza betetzen den:

(3.6) $$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \varepsilon \int_{\Gamma} uv \, d\sigma - l \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} g(u) v dx, \forall v \in H^1(\Omega)\text{"}$$

(3.6) problemaren ebazpen bat lortzeko, $H^1(\Omega)$ espazioan definituriko $S_\varepsilon(\cdot)$ ondoko funtzionalaren puntu kritiko baten existentzia frogatuko dugu, zeren eta geroago ikusiko dugunez, S_ε-en puntu kritikoak aipaturiko problemaren ebazpenak baitira.

(3.7) $$S_\varepsilon(u) = \tfrac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_{\Gamma} u^2 d\sigma - l \int_{\Omega} u^2 dx \right\} - \int_{\Omega} G(u) \, dx, \forall u \in H^1(\Omega)$$

Emaitza hau lortzeko, 1. Kapituluan emaniko puntu kritikoei buruzko emaitza erabiliko dugu, mendilepoaren teorema hain zuzen, beraz, $S_\varepsilon(\cdot)$ funtzionala teorema honen baldintzetan dagoela frogatu beharko da.

Frogapenaren eskema hauxe izango da:

(A) $S_\varepsilon(\cdot)$ funtzioa $H^1(\Omega)$ espazioan ondo definituta dago eta C^1 klasekoa da, beraren diferentziala ondokoa delarik:

$$\langle S'_\varepsilon(u),v\rangle = \int_\Omega \nabla u\nabla v\,dx + \varepsilon\int_\Gamma uv\,d\sigma - l\int_\Omega uv\,dx - \int_\Omega g(u)v\,dx\,,\ \forall u,v\in H^1(\Omega)$$

(B) $S_\varepsilon(\cdot)$ funtzioak $(P.S.)^+$ baldintza betetzen du.

(C) $S_\varepsilon(0)=0$ eta $\exists \rho,\alpha>0/\ S_\varepsilon(u)\geq 0, \forall u\in B_\rho-\{0\}$, eta $S_\varepsilon(u)\geq\alpha, \forall u\in S_\rho$.

(D) $\exists\, e\in H^1(\Omega)-\{0\}/S_\varepsilon(e)=0$.

(E) $S_\varepsilon(\cdot)$ funtzioaren puntu kritikoak erregularrak dira.

3.3.2 <u>(A) baldintzaren frogapena</u>.

Ikus dezagun lehenik, $S_\varepsilon(\cdot)$ funtzionala ondo definituta dagoela.

$u\in H^1(\Omega)$ denez gero, $\int_\Omega |\nabla u|^2dx$ eta $\int_\Omega u^2dx$ integralak finituak dira. Honetaz gain, $\gamma_0(u)\in L^2(\Gamma)$, beraz, $\int_\Gamma u^2d\sigma$ finitua da.

Hortaz, nahikoa da $\int_\Omega G(u)dx$ finitua dela ikustea, $\forall u\in H^1(\Omega)$.

3.8. <u>Lema</u>. Existitzen dira $s\in[1,N+2/N-2)$ eta $k_3,k_4>0$ konstanteak zeintzutarako, $|G(z)|\leq k_3|z|+k_4|z|^{s+1}, \forall z\in R$. Hortaz, $\int_\Omega G(u)dx$ integrala ondo definituta dago, $u\in H^1(\Omega)$ edozein izanik.

<u>Frogapena</u>.

3.3. Teoremaren (f_4) baldintzari esker,

$$\exists\, s\in[1,N+2/N-2),\ K_1,K_2>0/\ |f(z)|\leq K_1+K_2|z|^s \Rightarrow$$

$$|g(z)| = |f(z)-lz| \leq |f(z)|+|l||z| \leq K_1+|l||z|+K_2|z|^s$$

$$\leq C_1+C_2|z|^s\ ,\ \forall z\in\mathbb{R}.$$

$C_1=k_1+|l|$ eta $C_2=k_2+|l|$ izanik.

Hortaz,

$$|G(z)|\leq\int_0^z|g(t)|dt\leq\int_0^z(C_1+C_2|t|^s)dt\leq C_1|z|+\frac{C_2}{s+1}|z|^{s+1},\ \forall z\in\mathbb{R}$$

beraz, nahikoa da $k_3=C_1$ eta $k_4=C_2/s+1$ aukeratzea.

Honelatan ba, $u\in H^1(\Omega)$ bada,

$$\int_\Omega|G(u)|dx\leq\int_\Omega[k_3|u(x)|+k_4|u(x)|^{s+1}]dx=k_3\int_\Omega|u(x)|dx+k_4\int_\Omega|u(x)|^{s+1}dx$$

eta $s\in[1,N+2/N-2)$ denez gero $s+1\in[2,2N/N-2)$ eta Sobolev-en injekzioei esker, $u\in L^p(\Omega)$, $\forall p\in[1,2N/N-2)$ dugu; beraz, $\int_\Omega|u(x)|dx$ eta $\int_\Omega|u(x)|^{s+1}dx$ integralak ondo definituta daude eta honexegatik $\int_\Omega G(u)dx$ ere.

$S_\varepsilon(\cdot)$ funtzioa ondo definituta dagoela ikusi ondoren, ikus dezagun C^1 klasekoa dela eta beraren diferentziala lehenago aipaturikoa dela.

3.9. Lema. Biz $T_1(u)=\frac{1}{2}\left\{\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma u^2d\sigma-l\int_\Omega u^2dx\right\}$, $u\in H^1(\Omega)$, $H^1(\Omega)$-n definituriko funtzionala.

Orduan, $T_1\in C^1(H^1(\Omega))$ eta beraren diferentziala ondokoa da,

(3.10) $$\langle T_1'(u),v\rangle=\int_\Omega\nabla u\nabla v\,dx+\varepsilon\int_\Gamma uv\,d\sigma-l\int_\Omega uv\,dx,\ \forall u,v\in H^1(\Omega)$$

Frogapena.

Biz $u\in H^1(\Omega)$. Ikus dezagun ondoko limitea nulua dela,

(3.11) $$\lim_{v\to 0}\frac{|T_1(u+v)-T_1(u)-\langle T_1'(u),v\rangle|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}=0$$

$\langle T_1'(u),v\rangle$ (3.10) adierazpenean definiturikoa izanik,

$$\frac{|T_1(u+v)-T_1(u)-\langle T_1'(u),v\rangle|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}=\frac{1}{2}\,\frac{\left|\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma v^2d\sigma-l\int_\Omega v^2dx\right|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}$$

$$\leq\frac{1}{2}\max(1,|l|,\varepsilon)\frac{\|v\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\gamma_0(v)\|^2_{L^2(\Gamma)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}$$

$$\leq k_5 \frac{\|v\|^2_{H^1(\Omega)} + k_6^2\|v\|^2_{H^1(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} = k_5 \left(\|v\|_{H^1(\Omega)} + k_6^2\|v\|_{H^1(\Omega)}\right)$$

$k_5=½\max(1,|l|,\varepsilon)$ izanik eta $H^1(\Omega)$-tik $L^2(\Gamma)$-rainoko aztarren aplikazioa jarraia dela kontutan izanik.Hortaz,

$$\lim_{v\to 0} k_5(\|v\|_{H^1(\Omega)}+k_6^2\|v\|_{H^1(\Omega)})=0$$

denez gero,(3.11) betetzen da.

Honelatan ba,(3.10) adierazpenean definituriko T_1' funtzioa T_1 funtzioaren diferentziala da.Bestalde,$T_1'(\cdot)$ lineala da.Hau kontutan izanik,ikus dezagun jarraia dela:

$$\|T_1'(u)\|_{[H^1(\Omega)]'} = \sup_{\substack{w\in H^1(\Omega)\\ \|w\|=1}} |\langle T_1'(u),v\rangle|$$

$$= \sup_{\substack{w\in H^1(\Omega)\\ \|w\|=1}} \left|\int_\Omega \nabla u\nabla w\,dx + \varepsilon\int_\Gamma uw\,d\sigma - l\int_\Omega uw\,dx\right|$$

$$\leq \sup_{\substack{w\in H^1(\Omega)\\ \|w\|=1}} \left|\|u\|_{H^1(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon\|u\|_{L^2(\Gamma)}\|w\|_{L^2(\Gamma)} + |l|\,\|u\|_{H^1(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega)}\right|$$

$$\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon k_6^2\|u\|_{H^1(\Omega)} + |l|\,\|u\|_{H^1(\Omega)} = (1+\varepsilon k_6^2+|l|)\,\|u\|_{H^1(\Omega)}\,.$$

Hortaz,$T_1'(\cdot)$ jarraia da eta $T_1\in C^1(H^1(\Omega))$.

3.12.<u>Lema</u>.$T_2(u)=\int_\Omega G(u)dx,\forall u\in H^1(\Omega)$,$H^1(\Omega)$ espazioan definituriko funtzionala C^1 klasekoa da,beraren diferentziala ondokoa delarik:

(3.13) $\qquad \langle T_2'(u),v\rangle = \int_\Omega g(u)v,\forall u,v\in H^1(\Omega)$.

Honetaz gain,$H^1(\Omega)$-tik $(H^1(\Omega))'$ dualerainoko T_2' eragilea trinkoa da.

<u>Frogapena</u>.

T_2 funtzioa C^1 klasekoa dela eta beraren diferentziala (3.13) adierazpenekoa dela ikusteko,nahikoa da ondoko bi baldintzak betetzen direla ikustea (ikus(16)):

(a) $\forall u,v\in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{t\to 0+} \left|\frac{1}{t}\left(T_2(u+tv)-T_2(u)-t\int_\Omega g(u)v\,dx\right)\right| = 0$$

(b) $\lim_{n\to\infty} u_n = u, H^1(\Omega)$-n $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ \|v\|=1}} \Big| \int_\Omega (g(u_n)-g(u))v\,dx \Big| = 0.$$

Baldintza hauek betetzen direla froga dezagun:

(a)Ondoko desberdintza nabaria da,

$$\left| \frac{1}{t}\left[T_2(u+tv) - T_2(u) - t\int_\Omega g(u)v\,dx \right] \right| \leq \frac{1}{t}\int_\Omega \left| G(u+tv) - G(u) - tg(u)v \right| dx$$

Bestalde,

$$\left| \frac{1}{t}\left\{ G(u+tv) - G(u) - tg(u)v \right\} \right| \leq \left\{ \sup_{t\in[0,1]} |g(u+tv)| + |g(u)| \right\} |v|$$

$$\leq \left\{ \sup_{t\in[0,1]} \left\{ c_1 + c_2|u+tv|^s \right\} + c_1 + c_2|u|^s \right\} |v|$$

$$\leq \left\{ \alpha_1 + \alpha_2|u|^s + \alpha_3|v|^s \right\} |v| \quad , \text{ i.n. } \Omega\text{-n}$$

batezbesteko balioaren teorema eta $h(z)=z^s$, $s\in[1,N+2/N-2)$ funtzioa konbexua dela erabiliz.

Biz $w=\{\alpha_1+\alpha_2|u|^s+\alpha_3|v|^s\}|v|$ funtzioa.Sobolev-en injekzioak eta Hölder-en desberdintza aplikatuz,$w\in L^1(\Omega)$ espazioko elementua dela frogatzen da.

Bestalde,

$$\lim_{t\to 0} \frac{G(u+tv) - G(u) - tg(u)v}{t} = 0, \text{ i.n. } \Omega\text{-n},$$

denez gero,konbergentzia gaindituaren teorema aplikaturik, baldintza hau frogatuta egongo da.

(b) Baldintza hau frogatu beharrean,berau baino sendoagoa den beste baldintza bat frogatuko dugu,bide batez, T_2' eragilea trinkoa dela izango dugularik.Frogatuko duguna hauxe izango da:

"$\lim_{n\to\infty} u_n = u, H^1(\Omega)$-ren topologia ahularekiko $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ \|v\|=1}} \Big| \int_\Omega (g(u_n)-g(u))v\,dx \Big| \Big) = 0".$$

$\forall q\in[1,2N/N-2)$, $H^1(\Omega)$-tik $L^q(\Omega)$-rainoko injekzioa trinkoa denez gero, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=u$, $L^q(\Omega)$-n, $\forall q\in[1,2N/N-2)$.

Bestalde, g lokalki lipschitzearra da eta ondoko desberdintza betetzen du: $|g(z)|\leq C_1+C_2|z|^s$, $\forall z\in R$. Beraz, Krasnoselski-ren emaitza aplikatuz (ikus (10)) ondoko funtzioa jarraia dela ikusten dugu, $\forall p\in[s,+\infty)$:

(3.14) $$\begin{aligned} g: L^p(\Omega) &\longrightarrow L^{p/s}(\Omega). \\ u(x) &\dashrightarrow g(u(x)). \end{aligned}$$

Honetaz gain, $v\in H^1(\Omega) \Rightarrow v\in L^{2N/N-2}(\Omega)$. Bestalde, $(2N/N-2)s\in[2N/N+2,2N/N-2)\subset[1,2N/N-2)$, beraz, lehen aipatu den moduan, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=u$, $L^{(2N/N+2)s}(\Omega)$-n eta (3.14) aplikazioa jarraia denez gero, $\lim g(u_n)=g(u)$, $L^{2N/N+2}(\Omega)$-n.

Honelatan ba, Hölder-en desberdintza erabiliz:

$$\sup_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ \|v\|=1}} \left|\int_\Omega [g(u_n)-g(u)]v\,dx\right| \leq \sup_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ \|v\|=1}} \left(\int_\Omega |g(u_n)-g(u)|^{2N/N+2}\right)^{\frac{N+2}{2N}} \left(\int_\Omega |v|^{2N/N-2}\right)^{\frac{N-2}{2N}}$$

$$\leq \alpha_4 \|g(u_n)-g(u)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \to 0, \quad n\to+\infty$$

α_4 konstantea, $H^1(\Omega)$-tik $L^{2N/N-2}(\Omega)$-rainoko injekzioaren jarraitasunarena delarik.|

3.9 eta 3.12. Lemen ondorio bezala, (A) baldintza frogatuta geratzen da, hau da, $S_\varepsilon\in C^1(H^1(\Omega))$ eta beraren diferentziala ondokoa da:

$$\langle S'_\varepsilon(u),v\rangle = \int_\Omega \nabla u\nabla v\,dx + \varepsilon\int_\Gamma uv\,d\sigma - l\int_\Omega uv\,dx - \int_\Omega g(u)v\,dx, \forall u,v\in H^1(\Omega)$$

$S=T_1+T_2$ dela kontutan izanik.

3.3.3 <u>(B) baldintzaren frogapena</u>.

Biz (u_n) ondokoak betetzen dituen $H^1(\Omega)$ espazioko segida:

(3.15) $\exists\ \beta, d\geq 0/\ \beta\leq S_\varepsilon(u_n)\leq d, \forall n\in N.$

(3.16) $\lim S'_{\varepsilon}(u_n)=0,(H^1(\Omega))'$-n.

eta ikus dezagun,segida honek azpisegida konbergenteak dituela.

3.17.Lema. $\exists\eta>0/\|v\|^2_{H^1(\Omega)}\leq\eta\left\{\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma v^2d\sigma-l\int_\Omega v^2dx\right\},\ \forall v\in H^1(\Omega)$.

Frogapena.

2.45.Korolarioan ikusitako emaitzari esker:

$$\lambda_1\int_\Omega v^2dx\leq\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma v^2d\sigma,\forall v\in H^1(\Omega)\Rightarrow$$
$$-\int_\Omega v^2dx\geq-\frac{1}{\lambda_1}\left[\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma v^2d\sigma\right],\forall v\in H^1(\Omega).$$

$l<\lambda_1$ denez gero, $\exists\delta>0/l+\delta<\lambda_1$.Honelatan ba,

$$\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma v^2d\sigma-l\int_\Omega v^2dx=\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma v^2d\sigma-(l+\delta)\int_\Omega v^2dx+\delta\int_\Omega v^2dx$$
$$\geq\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma v^2d\sigma-\frac{l+\delta}{\lambda_1}\left\{\int_\Omega v^2dx+\varepsilon\int_\Gamma v^2d\sigma\right\}+\delta\int_\Omega v^2dx$$
$$=\left(1-\frac{l+\delta}{\lambda_1}\right)\left\{\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma v^2d\sigma\right\}+\delta\int_\Omega v^2dx$$
$$\geq\min\left(\left(1-\frac{l+\delta}{\lambda_1}\right),\delta\right)\left\{\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\int_\Omega v^2dx\right\}=\eta\|v\|^2_{H^1(\Omega)},\forall v\in H^1(\Omega)$$

$\eta=\min((1-(l+\delta)/\lambda_1),\delta)>0$ izanik.

3.18.Oharra.

Erraz froga daiteke,ezen ondoko $\|\cdot\|_\varepsilon$ erdinorma,$H^1(\Omega)$ espazioko ohizko normarekiko baliokidea den norma dela:

$$\|v\|_\varepsilon=\left\{\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma v^2d\sigma\right\}^{1/2},\ \forall v\in H^1(\Omega)$$

Aztarren aplikazioaren jarraitasuna kontutan izanik,nabaria da ondokoa betetzen dela:

$$\exists M>0/\ \|v\|_\varepsilon\leq M\|v\|_{H^1(\Omega)},\ \forall v\in H^1(\Omega)$$

Bestalde, 2.45. korolarioa kontutan izanik,

$$\|v\|_\varepsilon^2=\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma v^2d\sigma\geq\frac{1}{2}\left\{\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma v^2d\sigma\right\}+\frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega v^2dx$$

$$\geq\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega v^2dx\geq m^2\|v\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

$m=\min(\frac{1}{2},\lambda_1/2)$ izanik.

Honetaz gain, argi dago $\|\cdot\|_\varepsilon$ norma, ondoko biderkadura eskalarrari dagokiona dela:

$$(u,v)_\varepsilon=\int_\Omega\nabla u\nabla v\,dx+\varepsilon\int_\Gamma uv\,d\sigma,\ \forall u,v\in H^1(\Omega).$$

3.19. Teorema. $(u_n)\subset H^1(\Omega)$ segidak (3.15) eta (3.16) baldintzak betetzen baditu, ondokoak ematen dira:

(i) (u_n) segida bornatua da.

(ii) $\exists(u_n')$ azpisegida konbergentea.

Frogapena.

(i) (3.15)-etik hauxe dugu:

(3.20) $$\frac{1}{2}\left\{\int_\Omega|\nabla u_n|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma u_n^2d\sigma-l\int_\Omega u_n^2dx\right\}-\int_\Omega G(u_n)dx\leq d,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Bestalde, $\lim S_\varepsilon'(u_n)=0$ denez gero,

$$\exists n_0\in\mathbb{N}/\ \forall n\geq n_0,\ \|S_\varepsilon'(u_n)\|\leq 1\ \Longleftrightarrow$$

$$\exists n_0\in\mathbb{N}/\ \forall n\geq n_0,\ |\langle S_\varepsilon'(u_n),v\rangle|\leq\|v\|_{H^1(\Omega)},\ \forall v\in H^1(\Omega)\Rightarrow$$

$$\exists n_0\in\mathbb{N}/\ \forall n\geq n_0,\ |\langle S_\varepsilon'(u_n),u_n\rangle|\leq\|u_n\|_{H^1(\Omega)}.$$

hau da,

(3.21) $$\exists n_0\in\mathbb{N}/\forall n\geq n_0,\left|\int_\Omega|\nabla u_n|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma u_n^2d\sigma-l\int_\Omega u_n^2dx-\int_\Omega g(u_n)u_ndx\right|\leq\|u_n\|$$

Honelatan ba, (3.20) eta (3.21) adierazpenetatik ondokoa lortzen dugu:

(3.22) $$\exists n_0\in\mathbb{N}/\ \forall n\geq n_0,\ \left(\frac{1}{2}-\theta\right)\left\{\int_\Omega|\nabla u_n|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma u_n^2d\sigma-l\int_\Omega u_n^2dx\right\}-\int_\Omega(G(u_n)-\theta u_ng(u_n))$$

$$\leq d+\theta\|u_n\| .$$

Bestalde,

$$\int_\Omega [G(u_n)-\theta u_n g(u_n)]dx = \int_{\{x\in\Omega/|u_n(x)|<M\}} [G(u_n)-\theta u_n g(u_n)]dx + \int_{\{x\in\Omega/|u_n(x)|\geq M\}} [G(u_n)-\theta u_n g(u_n)]dx$$

$$\leq \int_{\{x\in\Omega/|u_n(x)|<M\}} [G(u_n)-\theta u_n g(u_n)]dx \leq k(M)$$

(f_3) baldintza kontutan izanik eta k(M) konstantea nahiko handia aukeratuz.

(3.22) eta azken desberdintza kontutan izanik ondokoa dugu:

$$\exists n_0\in \mathbb{N}/\forall n\geq n_0,\ (\tfrac{1}{2}-\theta)\left\{\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx+\varepsilon\int_\Gamma u_n^2\, d\sigma - l\int_\Omega u_n^2\, dx\right\}\leq k(M)+d+\theta\|u_n\|$$

eta 3.17.Leman frogatutakoari esker:

$$\exists n_0\in \mathbb{N}/\forall n\geq n_0,\ (\tfrac{1}{2}-\theta)\eta\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)}\leq K(M)+d+\theta\|u_n\|_{H^1(\Omega)} .$$

eta azken desberdintza honek, (u_n) segida bornatua dela azaltzen digu.

(ii) (u_n) segida $H^1(\Omega)$-n bornatua da, beraz, $H^1(\Omega)$ erreflexiboa denez gero, (u_n') azpisegida ahulki konbergentea existitzen da.

3.12.Leman, T_2' eragilea trinkoa zela ikusten genuen, modu berean, arrazonamendu berberari jarraituz, ondokoa froga daiteke:

"$F(z)=\int_0^z f(s)ds, \forall z\in R$, bada, $T(u)=\int_\Omega F(u)dx, \forall u\in H^1(\Omega)$ eragilea C^1 klasekoa da $H^1(\Omega)$-n, beraren diferentziala hauxe delarik:

$$\langle T'(u),v\rangle = \int_\Omega f(u)v\, dx,\ \forall u,v\in H^1(\Omega) .$$

Honetaz gain, T' eragilea trinkoa da".

Honelatan ba, $(T'(u_n'))$ konbergentea izango da $(H^1(\Omega))'$ dualean.

Bestalde,

$$\langle S_\varepsilon'(u_n'),v\rangle = \int_\Omega \nabla u_n'\cdot\nabla v\, dx + \varepsilon\int_\Gamma u_n' v\, d\sigma - l\int_\Omega u_n' v\, dx - \int_\Omega g(u_n')v\, dx$$

$$= \int_\Omega \nabla u'_n \nabla v\,dx + \varepsilon \int_\Gamma u'_n v\,d\sigma - \int_\Omega F(u'_n) v\,dx$$

$$= (u'_n, v)_\varepsilon - \langle T'(u_n), v\rangle \;, \forall n \in \mathbb{N}, \forall v \in H^1(\Omega).$$

$(\cdot,\cdot)_\varepsilon$ biderkadura eskalarra, 3.18. Oharrean aipaturikoa izanik.

Honelatan ba, $H^1(\Omega)$ espazioan ohizko normarekiko baliokidea den $\|\cdot\|_\varepsilon$ norma kontsideratzen badugu, $S'_\varepsilon(u'_n)$ eragileetarako ondoko adierazpena izango dugu:

$$S'_\varepsilon(u'_n) = u'_n - T'(u'_n), (H^1(\Omega))'\text{-n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Hortaz, $\exists \lim_{n\to\infty} u'_n$ $(H^1(\Omega))'$-n, $\lim_{n\to\infty} S'_\varepsilon(u'_n)=0$ baita eta $\lim_{n\to\infty} T'(u'_n)$ existitzen baita. $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_\varepsilon)$ Hilbert-en espazioa denez gero, $\exists \lim_{n\to\infty} u'_n$, $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_\varepsilon)$-n eta $\|\cdot\|_\varepsilon$ eta $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ normak baliokideak direla kontutan izanik, (u'_n) azpisegida $H^1(\Omega)$-n konbergentea dela ikusten dugu.$\rfloor$

3.23. Oharra.

(f_3) baldintza izan beharrean, ondoko (f'_3) baldintza izan bagenu, teorema hau frogatu ahal izan genukeen,

(f'_3) $F(z) \leq \theta z f(z), \forall z \in \mathbb{R}.$

Dena dela, $S_\varepsilon(\cdot)$ funtzionalak (D) baldintza betetzen duela ikusteko, (f_3) baldintzaren beharra izango dugu.

3.3.4 (C) baldintzaren frogapena.

Oso erraz ikusten da, $S_\varepsilon(0)=0$ dela.

$g(z)=f(z)-lz$ da, beraz, $g(0)=0$ eta $\overline{\lim_{|t|\to 0}}\, g(t)/t=0$. Beraz, $g(z)=o(|z|)$, $z=0$ puntuan. Hortaz, $G(z)=\int_0^z g(s)ds, \forall z \in \mathbb{R}$ denez gero, $G(z)=o(|z|^2)$ izango da $z=0$ puntuan. Honelatan ba,

$$\text{(3.24)} \qquad \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \;/\; |G(z)| \leq \varepsilon |z|^2, \forall z \in \mathbb{R} : |z| \leq \delta.$$

Honetaz gain, 3.8. Leman ondokoa ikusten zen,

$$\exists s\in[1,N+2/N-2),\ k_3,k_4>0 \Big/ |G(z)|\leqslant k_3|z|+k_4|z|^{s+1},\ \forall z\in R.$$

Dena dela, ondokoa kontutan izan behar dugu:
s=1 denean, $|G(z)|\leqslant k_3|z|+k_4|z|^2\leqslant(k_3+k_4)|z|+k_4|z|^r, \forall r>2$. Beraz, hauxe suposa dezakegu:

(3.25) $$\exists s\in(1,N+2/N-2),k_3,k_4>0 \Big/ |G(z)|\leqslant k_3|z|+k_4|z|^{s+1},\ \forall z\in R.$$

Honelatan ba, $l_1=k_3\delta^{-s}+k_4$ konstantea aukeraturik, honako hau beteko da:

(3.26) $$|G(z)|\leqslant l_1|z|^{s+1}, \forall z\in R/|z|\geqslant\delta.$$

(3.24) eta (3.26) adierazpenak bildurik ondokoa dugu:

(3.27) $$|G(z)|\leqslant\varepsilon|z|^2+l_1|z|^{s+1}, \forall z\in R.$$

Beraz,

(3.28) $$\left|\int_\Omega G(u)\,dx\right|\leqslant\varepsilon\int_\Omega u^2dx+l_1\int_\Omega|u|^{s+1}dx$$
$$\leqslant\varepsilon\|u\|^2_{H^1(\Omega)}+l_1l_2^{s+1}\|u\|^{s+1}_{H^1(\Omega)},\ \forall u\in H^1(\Omega).$$

$H^1(\Omega)$-tik $L^{s+1}(\Omega)$-rainoko injekzioa jarraia dela kontutan izanik, eta l_2 jarraitasun-konstantea izanik.

(3.28) adierazpenetik hauxe dugu:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\left|\int_\Omega G(u)\,dx\right|}{\|u\|^2_{H^1(\Omega)}}\leqslant\varepsilon,$$

eta $\varepsilon>0$ edozein zela kontutan badugu,

$$\lim_{u\to 0}\frac{\left|\int_\Omega G(u)\,dx\right|}{\|u\|^2_{H^1(\Omega)}}=0.$$

hortaz,

(3.29) $$\int_\Omega G(u)\,dx=o\left(\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\right), u=0 \text{ puntuan.}$$

Bestalde, 3.17. Lematik,

$$S_\varepsilon(u)=\tfrac{1}{2}\left\{\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma u^2d\sigma-l\int_\Omega u^2dx\right\}-\int_\Omega G(u)\,dx$$
$$\geqslant\tfrac{1}{2}\left\{\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma u^2d\sigma-l\int_\Omega u^2dx\right\}-\left|\int_\Omega G(u)\,dx\right|$$

$$\geq \frac{1}{2\eta}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \left|\int_\Omega G(u)dx\right| , \forall u \in H^1(\Omega).$$

Honetaz gain, (3.29)-tik,

$$\exists \rho>0 / \left|\int_\Omega G(u)dx\right| \leq \frac{1}{4\eta}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} , \forall u \in B_\rho - \{0\}$$

beraz,

$$S_\varepsilon(u) \geq \frac{1}{2\eta}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \left|\int_\Omega G(u)dx\right| \geq \frac{1}{4\eta}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} , \forall u \in B_\rho - \{0\}$$

bereziki,

$$S_\varepsilon(u) \geq \rho^2/4\eta , \forall u \in S_\rho .$$

(C) baldintza frogatuta geratzen delarik.

3.3.5 <u>(D) baldintzaren frogapena</u>.

(f_5) baldintzatik ondokoa lortzen da,

$$\exists \eta_1, A_1 > 0 / g(z) \geq \eta_1 z , \forall z \in \mathbb{R} / |z| > A_1 .$$

Biz $A_2 = \int_0^{A_1} g(s)ds$, orduan,

$$\forall z > A_1, \quad G(z) = A_2 + \int_{A_1}^{z} g(s)ds \geq A_2 + \eta_1 \int_{A_1}^{z} s ds = A_2 + \eta_1\left[\frac{z^2}{2} - \frac{A_1^2}{2}\right]$$

beraz, $A_3 = |2A_2/\eta_1 - A_1^2|^{1/2}$ aukeraturik,

$G(z) > 0, \forall z > A_3$.

Bestalde, (f_3) baldintzatik,

$$\exists \theta \in [1, N+2/N-2) , M > 0 / G(z) \leq \theta z g(z) , \forall z \in \mathbb{R} : z > M .$$

beraz, $A_4 = \max(A_3, M)$ bada, $1/\theta t \leq g(t)/G(t), \forall t > A_4$, eta $z > A_4$ bakoitzerako desberdintza hau (A_4, z) tartean integraturik:

$$1/\theta \log(z/A_4) \leq \log(G(z)/G(A_4)) , \forall z > A_4 \Longleftrightarrow$$

$$\log(z/A_4)^{1/\theta} \leq \log(G(z)/G(A_4)) , \forall z > A_4 .$$

beraz,

$$z^{1/\theta} G(A_4)/A_4^{1/\theta} \leq G(z) , \forall z > A_4 .$$

hortaz, $\eta_2=G(A_4)/A_4^{1/\theta}>0$ aukeraturik,

(3.30) $$G(z)\geq \eta_2 z^{1/\theta},\ \forall z>A_4.$$

Biz $u=k>0$ funtzio konstantea, zeinetarako $\|u\|_{H^1(\Omega)}=1$ den.

$\forall R>0$, $\|Ru\|_{H^1(\Omega)}=R$, beraz, 3.3.4 atalean frogaturikoari esker,

$$S_\varepsilon(Ru)>0,\ \forall R<\rho.$$

Honetaz gain,

(3.31) $$S_\varepsilon(Ru)=\tfrac{1}{2}\left\{\varepsilon\int_\Gamma R^2k^2d\sigma-l\int_\Omega R^2k^2dx\right\}-\int_\Omega G(Rk)\,dx=$$

$$=\frac{R^2k^2}{2}\left\{\varepsilon\int_\Gamma d\sigma-l\int_\Omega dx\right\}-G(Rk)\int_\Omega dx=$$

$$=\eta_3\frac{R^2k^2}{2}-\eta_4 G(Rk).$$

$\eta_4=\int_\Omega dx>0$ izanik.

Beraz, $R>A_4/k$ denean, (3.30) desberdintza erabiliz,

$$S_\varepsilon(Ru)=\eta_3\frac{R^2k^2}{2}-\eta_4 G(Rk)\leq\eta_3\frac{R^2k^2}{2}-\eta_4\eta_2 R^{1/\theta}k^{1/\theta}.$$

eta $1/\theta>2$ denez gero,

$$\lim_{R\to\infty}S_\varepsilon(Ru)\leq\lim_{R\to+\infty}\left(\eta_3\frac{R^2k^2}{2}-\eta_4\eta_2R^{1/\theta}k^{1/\theta}\right)=-\infty.$$

hortaz, $\exists\bar{R}>A_4/k$: $S_\varepsilon(\bar{R}u)<0$.

Honelatan ba, honako hau dugu: $R<\rho$ denean, $S_\varepsilon(Ru)>0$ eta $\exists\bar{R}>A_4/k$ zeinetarako $S_\varepsilon(\bar{R}u)<0$, beraz, S_ε jarraia denez gero, $\exists R_0>0/S_\varepsilon(R_0u)=0$.

Honelatan ba, $\exists e=R_0k\in H^1(\Omega)$, $e\notin B_\rho/S_\varepsilon(e)=0$.

3.3.6 S_ε funtzionalaren puntu kritikoaren erregulartasuna.

Aurreko ataletan ikusitakoari esker, S_ε funtzioa 1.Kapituluko 1.25.Teoremaren baldintzetan dagoela ikusten dugu. Teorema honen ondorio bezala hauxe dugu,

$$\exists u\in H^1(\Omega)-\{0\}\ /\ S'_\varepsilon(u)=0,\ (H^1(\Omega))'\text{-n}$$

hau da,

$$\langle S'_\varepsilon(u),v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + \varepsilon\int_\Gamma uv\, d\sigma - l\int_\Omega uv\, dx - \int_\Omega g(u)v\, dx = 0\,,\ \forall v\in H^1(\Omega)$$

beraz, u funtzioa (puntu kritikoa) gure problemaren formulazio bariazionalaren ebazpena da.

Berèziki, $\forall \varphi \in D(\Omega)$, Γ gainean nulua denez gero,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\, dx - \int_\Omega f(u)\varphi\, dx = 0 \iff$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\, dx = \int_\Omega f(u)\varphi\, dx.$$

beraz,

(3.32) $\qquad -\Delta u = f(u)$, $D'(\Omega)$-n (banaketen zentzuan)

u $H^1(\Omega)$-n dagoenez gero, Sobolev-en injekzioen bidez, $L^{2N/N-2}(\Omega)$-n dagoela ikusten dugu eta (f_4) baldintzatik, $f(u)$ $L^{2N/s(N-2)}(\Omega)$-n dagoela lortzen dugu. Honetaz gain, $2N/s(N-2) > 2N/N+2$ denez gero, $f(u)\in L^{2N/N+2}(\Omega)$.

Honelatan ba, $u\in H^1(\Omega)$ puntu kritikoaren laplacetarra, Δu, $L^{2N/N+2}(\Omega)$ espazioko elementua dela dugu. Hortaz, 2.23. Proposizioaren baldintzetan gaude eta bertan ematen den Green-en formula aplikatuz hauxe lortzen dugu:

$$-\int_\Omega \Delta u v\, dx + \langle \gamma_1(u), v\rangle + \varepsilon\int_\Gamma uv\, d\sigma - \int_\Omega f(u)v\, dx =$$

$$= -\int_\Omega \Delta u v\, dx - \int_\Omega f(u)v\, dx + \langle \gamma_1(u) + \varepsilon\gamma_0(u), v\rangle,\ \forall v\in H^1(\Omega)$$

$D(\Omega)$ espazioa $L^2(\Omega)$-n dentsoa dènez gero,

$$-\int_\Omega \Delta u v\, dx = \int_\Omega f(u)v\, dx,\ \forall v\in L^2(\Omega)$$

bereziki $\forall v\in H^1(\Omega)$, hortaz,

$$\langle \gamma_1(u) + \varepsilon\gamma_0(u), v\rangle = 0,\ \forall v\in H^1(\Omega).$$

eta $H^1(\Omega)$-tik $H^{1/2}(\Gamma)$-rainoko aztarren aplikazioaren suprajektibotasuna kontutan izanik honako hau dugu,

$$\gamma_1(u) + \varepsilon\gamma_0(u) = 0\,,\quad H^{-1/2}(\Gamma)\text{-n}$$

Hortaz, S_ε funtzioaren $u\in H^1(\Omega)$ puntu kritikoak ondokoak betetzen ditu:

(3.32) $$-\Delta u=f(u),D'(\Omega)\text{-n}.$$

(3.33) $$\gamma_1(u)+\varepsilon\gamma_0(u)=0,H^{-1/2}(\Gamma)\text{-n}.$$

3.34. Proposizioa. (3.32) eta (3.33) berdintzak betetzen dituen $H^1(\Omega)$-ko u funtzio erregularra da, hau da, $u\in C^2(\bar{\Omega})$ eta (3.1)-(3.2) problemaren ebazpena da.

Frogapena.

u $H^1(\Omega)$-n dagoenez gero, $\gamma_0(u)$ $H^{1/2}(\Gamma)$-n dago, eta $\gamma_1(u)=-\varepsilon\gamma_0(u)$ $H^{-1/2}(\Gamma)$-n denez gero, $\gamma_1(u), H^{1/2}(\Gamma)$ espazioko elementua da.

Bestalde, $u\in H^1(\Omega) \Longrightarrow u\in L^{2N/(N-2)}(\Omega)$. Sobolev-en injekzioei esker, (f_4) baldintza aplikaturik, $f(u)\in L^{2N/s(N-2)}(\Omega)$ dugu. Hortaz, A.D.N.-en emaitzari esker,

$$u\in W^{2,2N/s(N-2)}(\Omega).$$

Berriz ere, Sobolev-en injekzioak aplikatuz:

1. $N>4N/s(N-2)$ bada, hots, $N>4/s+2$, orduan:
   $u\in L^q(\Omega), 2N/s(N-2)\leq q\leq 2N/s(N-2)-4$.
2. $N=4N/s(N-2)$ bada, hau da, $N=4/s+2$, orduan:
   $u\in L^q(\Omega), 2N/s(N-2)\leq q<+\infty$.
3. $4N/s(N-2)>N$ bada, hau da, $N<4/s+2$, orduan:
   $u\in L^q(\Omega), 1\leq q\leq+\infty$.

2. eta 3, kasuetan, $u\in L^q(\Omega)$ izango dugu q nahiko handietarako. Bereziki $q>N/2$ denean. Honelatan ba, A.D.N.-en emaitza aplikatuz, $u\in W^{2,q}(\Omega)$, $q>N/2$ eta Sobolev-en injekzioei esker, $u\in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0<\alpha<2-(N/q)$.

1. kasuan ostera, hauxe dugu: $u\in L^{2N/s(N-2)-4}(\Omega) \Rightarrow f(u)\in L^{2N/s(s(N-2)-4)}(\Omega)$ eta A.D.N.-en emaitzaren bidez, $u\in W^{2,2N/s(s(N-2)-4)}(\Omega)$, $2N/s(s(N-2)-4)>2N/s(N-2)$ delarik. Beraz, prozesu hau aldi-kopuru finitu batetan errepikatuz, $u\in W^{2,q}(\Omega)$, $q>N/2$ lortuko dugu eta Sobolev-en injekzioei esker, $u\in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0<\alpha<2-(N/q)$.

Honetaz gain, f funtzioa lokalki lipschitzearra denez gero, $f(u) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0<\alpha\leq 2-(N/q)$ eta Schauder-en emaitzari esker, $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0<\alpha<2-(N/q)$, bereziki, $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Hortaz, $-\Delta u-f(u)$ funtzioa jarraia da eta (3.22)-tik,

$$-\Delta u=f(u), \Omega\text{-n.}$$

lortzen da.

$u \in C^2(\overline{\Omega})$ denez gero, $\gamma_1(u)=\frac{\partial u}{\partial n}$ eta $\gamma_0(u)=u$, beraz, (3.33)-tik, $\frac{\partial u}{\partial n}+\varepsilon u=0$, $H^{-1/2}(\Gamma)$-n. $H^{1/2}(\Gamma)$ $L^2(\Gamma)$-n dentsoa denez gero, $\frac{\partial u}{\partial n}+\varepsilon u=0$, $L^2(\Gamma)$-n eta funtzio jarraia denez gero,

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\varepsilon u=0, \ \Gamma\text{-n.} \ \rfloor$$

3.4.-ONDORIO GISA.

Aurreko ataletan zehar (3.1)-(3.2) problemarako ondoko ebazpenen existentzi teorema lortu dugu:

"$\Omega \subset R^N$, $N\geq 3$, ireki bornatu erregular konexua bada, eta f funtzioak 3.3.Teoremako (f_1)-(f_5) baldintzak betetzen baditu, (3.1)-(3.2) problemak, ebazpen ez-negatibo eta ez-nulu erregular bat du gutxienez, $u \in C^2(\overline{\Omega})$".

3.35.Oharra.

Argi dago ezen, puntu kritikoen emaitzaren bidez lortu dugun (3.1)-(3.2) problemaren ebazpena ez-nulua dela, 1.25.Teoremaren bidez lorturiko puntu kritikoak, ez-nuluak baitira.

4.KAPITULUA.

MUGAKO BALDINTZA NEUMANN-ENA DENEKO PROBLEMA ELIPTIKO ERDILINEALEN AZTERKETA.

4.1 Problemaren planteamendua.
4.2 Ebazpenen existentzi teorema.
4.3 Mugako baldintza zeiharra duteneko problemen ebazpenen konbergentziaz
4.3.1 $l>0$ kasua.
4.3.2 $l=0$ kasua.
4.3.3 $l<0$ kasua.

4. MUGAKO BALDINTZA NEUMANN-ENA DENEKO PROBLEMA ELIPTIKO ERDILINEALEN AZTERKETA.

4.1.-PROBLEMAREN PLANTEAMENDUA.

Kapitulu honetan, ondoko (4.1)-(4.2) problemaren azterketa egingo dugu, beraren ebazpenen existentziari buruzko emaitzak frogatzen saiatuko garelarik:

(4.1) $$-\Delta u=f(u), \quad \Omega\text{-n}.$$

(4.2) $$\frac{\partial u}{\partial n}=0 \quad , \quad \Gamma\text{-n}.$$

Aurreko kapituluan bezala, Ω multzoa R^N ($N\geq 3$) espazioko ireki konexu bornatu erregularra izango da eta Γ beraren muga, hau da, $\Gamma=\partial\Omega$.

Kapitulu honetan, bi parte bereiztu behar dira.

Lehenengoan, f funtzioaren gaineko baldintzak ezarriz, ekuazioaren ebazpen erregular ez-negatibo eta ez-nuluen existentzia frogatuko da, 3.Kapituluko 3.3.Teoremaren parekoa den teorema baten bidez.

Bigarrenean, (3.1)-(3.2) problemen ebazpenen segiden konbergentzia aztertuko dugu.Zerorantz jotzen dueneko (ε_n) zenbaki erreal positiboen segida bat kontsideratuz, (u_{ε_n}) beraiei dagozkien problema zeiharren ebazpenen segida bat aukeratuko dugu, beronen konbergentziataz arituko garelarik. Ikusiko dugunez, segida hau konbergentea deneko kasuan, beraren limitea (4.1)-(4.2) problemaren ebazpena izango da. Azkenik, adibide baten bidez, metodo hau erabiliz, oro har, ezinezkoa dela (4.1)-(4.2) problemaren ebazpen ez-nuluak aurkitzea ikusiko dugu.

4.2.-EBAZPENEN EXISTENTZI TEOREMA.

4.3 .<u>Teorema</u>. f funtzioak errealak ondoko (f_1)-(f_5) baldintzak betetzen baditu, existitzen da gutxienez, aurreko (4.1)-(4.2) problemaren $C^2(\overline{\Omega})$ klaseko ebazpen ez-nulu eta ez-negatibo bat.

(f_1) f lokalki lipschitzearra da.

(f_2) $f(0)=0$ eta $l=\overline{\lim_{t\to 0}}\, f(t)/t<0$.

(f_3) $\exists M>0, \theta\in[0,1/2)$ / $G(z)\leq\theta z g(z)$, $\forall z\in R: |z|\geq M$.

$g(z)=f(z)-lz$ eta $G(z)=\int_0^z g(s)ds$ direlarik.

(f_4) $\exists s\in[1,N+2/N-2)$, C_1, $C_2>0$ / $|f(z)|\leq C_1+C_2|z|^s$, $\forall z\in R$.

(f_5) $\underline{\lim}_{s\to\infty}\, g(s)/s>0$.

4.4.<u>Oharra</u>.

(f_1)-(f_5) baldintzak 3.3.Teoreman emandakoak dira, (f_2) izan ezik. Dena den, baldintza hau ere, 3.3.Teoremaren (f_2) baldintzaren parekoa da, $\lambda_1=0$ baita laplacetarraren lehen autobalioa, mugako baldintza Neumann-ena denean.

4.5.<u>Frogapena</u>.

(4.1)-(4.2) problema ondoko erara idatz daiteke:

(4.6) $$-\Delta u-lu=g(u),\ \Omega\text{-n}.$$

(4.2) $$\frac{\partial u}{\partial n}=0,\qquad \Gamma\text{-n}.$$

Green-en formulak erabiliz, problema honen formulazio bariazionala ondokoa dela ikus daiteke:

"$u\in H^1(\Omega)$ funtzioak aurkitzea, zeintzutarako hurrengo berdintza betetzen den:

(4.7) $$\int_\Omega \nabla u\nabla v\,dx-l\int_\Omega uv\,dx=\int_\Omega g(u)v\,dx,\quad \forall v\in H^1(\Omega)\text{"}$$

Kontsidera dezagun hurrengo funtzionala,

(4.8) $$S(u)=\frac{1}{2}\left\{\int_\Omega|\nabla u|^2dx-l\int_\Omega u^2dx\right\}-\int_\Omega G(u)dx,\ \forall u\in H^1(\Omega).$$

3.3.Teoremaren frogapena pausoz-pauso segituz, ondoko ondorioak lortzen dira.

Existitzen da $S(\cdot)$ funtzionalaren $u\in H^1(\Omega)$ puntu kritiko bat, ondokoa betetzen delarik:

$$\forall v\in H^1(\Omega),\ \langle S'(u),v\rangle=0$$

hau da,

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v\,dx - l\int_\Omega uv\,dx - \int_\Omega g(u)v\,dx=0,\ \forall v\in H^1(\Omega). \tag{4.9}$$

Honelatan ba, u puntu kritikoa gure problemaren formulazio ahul edo bariazionalaren ebazpena izango da.

Ohizko erregulartasunari buruzko arrazonamenduak erabiliz, u funtzioa erregularra dela izango dugu, hau da, $u\in C^2(\overline{\Omega})$ eta gure problemaren ebazpena zentzu sendoan, hots,(4.1)-(4.2) problemaren ebazpena.

Ebazpen hau ez-negatiboa aukera daitekeela ikusteko, nahikoa izango da 3.Kapituluko 3.2 ataleko arrazonamenduei jarraitzea.

4.10.<u>Oharra</u>.

Kontutan izatekoa da ezen,

$$\|u\|^* = \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - l\int_\Omega u^2 dx\right]^{1/2},\ \forall u\in H^1(\Omega) \tag{4.11}$$

aplikazioa $H^1(\Omega)$-ko ohizko normarekiko baliokidea den norma dela, $l<0$ baita.

Norma berri hau erabiliz, $S(\cdot)$ funtzionalaren adierazpena hauxe izango da,

$$S(u)=1/2\|u\|^{*2}-\int_\Omega G(u),\ \forall u\in H^1(\Omega).$$

Adierazpen hau erabiliz teorema hau frogatzerakoan, ematen diren zenbait pauso sinpleagoak geratuko litzaizkiguke.

4.3.-MUGAKO BALDINTZA ZEIHARRA DUTENEKO PROBLEMEN EBAZPENEN KONBERGENTZIAZ.

Suposa dezagun f funtzioak 4.3.Teoremako (f_1), (f_3), (f_4) eta (f_5) baldintzak betetzen dituela eta honetaz gain ondokoa ere,

$$(f_2') \quad f(0)=0 \text{ eta } l=\lim_{t\to 0} f(t)/t\geq 0.$$

$l\geq 0$ denez gero, ezinezkoa izango zaigu 4.3.Teoremako emaitza frogatzea, zeren eta,kasu honetan, ez baita existitzen ondoko baldintza betetzen duen $k>0$ konstanterik,

$$(4.13) \qquad p^2(u)=\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - l\int_\Omega u^2 dx \geq k\|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u\in H^1(\Omega).$$

Beste modu batez esanda,

$$a(u,v)=\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx - l\int_\Omega uv\, dx \quad , \forall u,v\in H^1(\Omega)$$

forma bilineal simetrikoa ez da koertzibo edo $H^1(\Omega)$-eliptikoa eta ezinezkoa izango zaigu problema bariazionalaren ebazpenik lortzea.

Oztopo hau ikusirik, (4.1)-(4.2) problema ebazteko, ondoko bideaz pentsa daiteke.

Kontsidera dezagun $(\varepsilon_n)\subset R_+$ 0-rantz jotzen duen zenbaki erreal positiboen segida beherakor bat.

Biz, $n\in N$ bakoitzerako, $u_n\in C^2(\overline{\Omega})$ (3.1)-(3.2) problemaren ebazpena, $\varepsilon=\varepsilon_n$ den kasurako.

n $+\infty$-rantz doanean, (3.2) mugako baldintza Neumann-en mugako baldintzara jotzen du, hau da, (4.2) baldintzara.Beraz, pentsa daiteke ezen, $(u_n)\subset C^2(\overline{\Omega})$ segidak, n $+\infty$-rantz doanean, (4.1)-(4.2) problemaren ebazpen batetarantz joko duela.Hala ere, ez da posiblea izango.

Posibilitate hau aztertzerakoan, ondoko hiru kasuak bereiztuko ditugu.

4.3.1 <u>$l>0$ kasua</u>.

Biz $\lambda_1(\varepsilon_n)$, $\varepsilon=\varepsilon_n$ deneko mugako baldintza zeiharra duene-ko autobalio-problemaren lehen autobalioa.

$\lim \varepsilon_n=0$ denez gero, $\lim \lambda_1(\varepsilon_n)=0$ da ere. Beraz, $l>0$ denez gero,

$$\exists n_0\in N \;/\; l>\lambda_1(\varepsilon_n),\ \forall n\geq n_0.$$

Honelatan ba, $n\geq n_0$ deneko kasuan 3.3.Teorema ez da aplikagarria. Hortaz, ezin dezakegu (u_n) problema zeiha-rren ebazpenen segida bat aukeratu eta ezinezkoa izango da lehen aipaturiko metodoari jarraituz,Neumann-en problema-ren ebazpenik lortzea.

4.3.2 <u>$l=0$ kasua</u>.

$l=0$ denez gero, $l<\lambda_1(\varepsilon_n)$, $\forall n\in N$. Beraz, 3.3.Teore-ma aplikagarria da eta $\varepsilon=\varepsilon_n$ bakoitzerako, u_n problema zeiha-rraren ebazpen ez-negatibo erregular bat dugu.

Kontsidera dezagun (u_n) problema zeiharren ebazpe-nen segida eta suposa dezagun segida hau bornatuta dagoela, hau da,

$$\exists C>0 \;/\; \|u_n\|_{H^1(\Omega)}\leq C,\ \forall n\in N.$$

$H^1(\Omega)$ espazioa erreflexiboa denez gero, existituko da azpisegida ahulki konbergentea. Dei diezaiogun azpisegida honi ere (u_n), notazioa errazteko eta biz $u \in H^1(\Omega)$ beraren limite ahula.

$u_n, \varepsilon=\varepsilon_n$ deneko problema zeiharraren ebazpena denez gero, ondokoa beteko du:

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v + \varepsilon \int_\Gamma u_n v \, d\sigma = \int_\Omega g(u_n) v \, dx, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{4.14}$$

(u_n) u-rantz ahulki konbergentea denez gero, ondo ko baldintzak betetzen dira:

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla v \, dx \xrightarrow{n \to +\infty} \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx, \ \forall v \in H^1(\Omega). \tag{4.15}$$

$$\int_\Gamma u_n v \, d\sigma \xrightarrow{n \to +\infty} \int_\Gamma u v \, d\sigma, \ \forall v \in H^1(\Omega). \tag{4.16}$$

$$\int_\Omega g(u_n) v \, dx \xrightarrow{n \to +\infty} \int_\Omega g(u) v \, dx, \ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{4.17}$$

(4.15) eta (4.16) bistakoak dira, (u_n) segidaren konbergentzia ahula dela eta. (4.17) betetzen dela ikusteko, nahikoa da 3.12.Lema aplikatzea.

Honelatan ba, (4.14) berdintza, n $+\infty$-rantz doaneko limitera eramanez, ondokoa betetzen dela ikusten dugu,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega g(u) v \, dx, \ \forall v \in H^1(\Omega). \tag{4.18}$$

Hau da, $u \in H^1(\Omega)$ funtzioa (4.1)-(4.2) problemaren ebazpena da.

Dena dela, lortu dugun ebazpena nulua izan daiteke eta kasu honetan, emaitza hau ez litzateke interesgarria izango, nahi ditugun ebazpenak ez-nuluak dira eta.

Beraz, l=0 deneko kasu honetan ondoko posibilitateak ditugu:

(i) (u_n) problema zeiharren ebazpenen segida ezbornatua izatea.

(ii) (u_n) bornatua izatea. Kasu honetan, existitzen da Neumann-en problemaren ebazpen batetarantz jotzen dueneko (u_n) segidaren azpisegida bat, bainan ebazpen hau nulua izan daiteke.

Hurrengo adibidearen bidez, l=0 deneko kasu honetan, Neumann-en problemaren ebazpen ez-nuluen existentzia zihurtezina dela ikusiko dugu.

4.19.<u>Adibidea</u>.

Kontsidera dezagun ondoko Neumann-en problema,

(4.20) $$-\Delta u=u^2,\ \Omega\text{-n}.$$

(4.21) $$\frac{\partial u}{\partial n}=0\ ,\quad \Gamma\text{-n}.$$

$\Omega\subset R^3$ ireki konexu bornatu erregularra izanik.

$f(z)=z^2$ funtzioak 4.3.Teoremako (f_1), (f_3), (f_4) eta (f_5) baldintzak betetzen ditu. Bestalde, $\overline{\lim_{t\to 0}}\ f(t)/t = f'(0)=0$, hau da, l=0.

Suposa dezagun, ezen (4.20)-(4.21) problemak ebazpen ez-nulu bat duela $u\in C^2(\overline{\Omega})$.

- $\Delta u=u^2$ denez gero, $\Delta u(x)\leq 0$ izango da, $\forall x\in\Omega$. Beraz, maximoaren printzipioa aplikatuz ondoko bi posibilitateak izango ditugu:

(i) $u=k$ funtzio konstantea izatea.

Kasu honetan, $\Delta u=0$ izango litzateke eta (4.20) ekuazioa betetzeko, u funtzioa nulua izan beherko litzateke.

(ii) $u(x)>\min\limits_{\xi\in\Gamma} u(\xi)$, $\forall x\in\Omega$.

Biz $\xi_0\in\Gamma$ u funtzioak minimoa erdiesten dueneko puntu bat. Maximoaren printzipio sendoak dioenez, puntu honetan, deribatu normala nulua izango litzateke, (4.21) baldintzaren kontra doalarik.

Beraz, kasu bietan absurdua lortu dugu, eta hala beharrez, (4.20)-(4.21) problemaren ebazpen bakarra nulua izango da.

Hortaz, $l=0$ denez eta (u_n) problema zeiharren ebazpenen segida bat dugunez gero, segida hau ez-bornatua izango da edo bornatua izatekotan, beraren azpisegida ahulki konbergenteen limiteak nuluak izango dira.

4.3.3 <u>$l<0$ kasua</u>.

$l<0$ deneko kasu honetan, 4.3.Teorema aplikagarria da eta (4.1)-(4.2) problemak ebazpen ez-negatibo erregular bat du gutxienez.

Honetaz gainera, $\varepsilon\in(0,1)$ bakoitzerako ere, existitzen da problema zeiharraren ebazpen ez-negatibo eta erregular bat.

4.22.<u>Lema</u>. $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)}$ problema zeiharren ebazpenen familia bornatuta dago $H^1(\Omega)$ espazioan.

<u>Frogapena</u>.

3.3.Teorema dela eta, $\varepsilon\in(0,1)$ bakoitzerako badakigu problema zeiharraren ebazpen bat u_ε existitzen dela. Ebazpen hau, ikusten genuenez, S_ε funtzionalaren puntu kritikoa da.

Ikus dezagun $(S_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)}$ funtzionalen familiak zeintzu baldintza betetzen dituen.

$$S_\varepsilon(u)=1/2\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\varepsilon\int_\Gamma u^2 d\sigma-l\int_\Omega u^2dx\right\}-\int_\Omega G(u)dx$$

$$\geq 1/2\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2dx-l\int_\Omega u^2dx\right\}-\int_\Omega G(u)dx$$

$$\geq C\|u\|^2_{H^1(\Omega)}-\left|\int_\Omega G(u)dx\right|\geq \frac{C}{2}\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\quad ,\forall u\in H^1(\Omega)/$$
$$\|u\|\leq\rho,\ \forall\varepsilon\in(0,1)$$

ρ nahiko txikia izanik, $\left|\int_\Omega G(u)\right|=o(\ \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\ )$ baita u=0 puntuan.

Bestalde, 3.Kapituluko 3.3.5 ataleko $u=k\in H^1(\Omega)$ funtzio konstantea aukeraturik, ondokoa dugu:

$$S_\varepsilon(Ru)=\frac{R^2k^2}{2}\left\{\varepsilon\int_\Gamma d\sigma-l\int_\Omega dx\right\}-G(Rk)\int_\Omega dx$$

$$\leq\frac{R^2k^2}{2}\left\{\int_\Gamma d\sigma-l\int_\Omega dx\right\}-G(Rk)\int_\Omega dx$$

$$\leq k_1R^2-k_2R^{1/\theta}\ ,\ \forall R>A_4/k\ .$$

beraz, $1/\theta>2$ dela kontutan izanik, ondokoa dugu:

$$\exists R_0\in R\ /\ \forall\varepsilon\in(0,1),\ \exists R_\varepsilon\in(0,R_0)\ :\ S_\varepsilon(R_\varepsilon u)=0.$$

Mendilepoaren teoreman ikusten zenez, ondoko Γ_ε multzoa aukeraturik, b_ε u_ε ebazpenari zegokion balio kritikoa ondokoa zen,

$$\Gamma_\varepsilon=\left\{h\in C(\,[0,1]\,,\ H^1(\Omega))\ /\ h(0)=0 \text{ eta } h(1)=\right.$$
$$\left.=R_\varepsilon k=e_\varepsilon\right\}.$$

$$b_\varepsilon=\inf_{h\in\Gamma_\varepsilon}\ \max_{u\in h[0,1]} S_\varepsilon(u)$$

Bistakoa denez, $b_\varepsilon\geq\alpha>0$, $\forall\varepsilon\in(0,1)$ eta bestalde,

$$\bar{h}: [0,1] \longrightarrow H^1(\Omega)$$
$$s \dashrightarrow h(s)=R_0 sk$$

funtzio jarraia kontsideratuz, ondokoa dugu:

$$b_\varepsilon = \inf_{h\in\Gamma_\varepsilon} \max_{u\in h[0,1]} S_\varepsilon(u) \leq \inf_{h\in\Gamma_\varepsilon} \max_{u\in h[0,1]} S_1(u) \leq \max_{u\in\bar{h}[0,1]} S_1(u)=\beta \quad ,\forall\varepsilon\in(0,1)$$

Hortaz, $(u_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ familiak ondokoak betetzen ditu:

(4.23) $$0<\alpha\leq S_\varepsilon(u_\varepsilon)\leq S_1(u_\varepsilon)\leq\beta.$$

(4.24) $$S'_\varepsilon(u_\varepsilon)=0, \forall\varepsilon\in(0,1).$$

Honelatan ba, 3.Kapituluko 3.19.Teoremako arrazonamendu berberari jarraituz, (u_ε) familia bornatuta dagoela lortzen da $H^1(\Omega)$ espazioan.

Bestalde, $H^1(\Omega)$ espazioan ohizko normarekiko baliokidea den ondoko norma kontsideratuz, $S'_\varepsilon(u_\varepsilon)$ eragilearen adierazpena ondokoa izango da:

$$\|u\|^* = \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 - \ell\int_\Omega u^2\right]^{1/2}, \quad \forall u\in H^1(\Omega)$$

$$S'_\varepsilon(u_\varepsilon)=u_\varepsilon+\varepsilon\gamma_0(u_\varepsilon)-T(u_\varepsilon)=0, \forall\varepsilon\in(0,1)$$

$H^1(\Omega)$-tik $(H^1(\Omega))'$ -erainoko T eragilea trinkoa delarik,

$$(T(u),v)=\int_\Omega g(u)v\,dx, \quad \forall u,v\in H^1(\Omega).$$

(u_ε) bornatua denez gero, $(\gamma_0(u_\varepsilon))$ ere bornatua izango da. Honetaz gainera, T trinkoa denez gero, existituko da $(T(u_n))' (T(u_\varepsilon))$ familiatik ateratako segida konbergente bat, eta (u_n) segidak ondokoak beteko ditu:

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty} T(u_n), \quad H^1(\Omega)\text{-n}.$$

$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \gamma_0(u_\varepsilon)=0$ baita, $(\gamma_0(u_\varepsilon))$ bornatuta baitago.

Honetaz gain, erraz ikus daitekeenez, (u_n) segidaren limitea ez da nulua, zeren eta nulua izango balitz,

$$S_{\varepsilon_n}(u_n) = 1/2 \left\{ \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \ell \int_\Omega u_n^2 + \varepsilon_n \int_\Gamma u_n^2 d\sigma \right\} - \int_\Omega G(u_n)dx$$
$$\leq C \|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} + \left|\int_\Omega G(u_n)\right|$$
$$\leq C' \|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} \quad , \forall n \geq n_0 .$$

$S_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \alpha > 0, \forall \varepsilon \in (0,1)$ izatearen kontra doalarik.

4.3.2 atalean eginiko arrazonamenduei esker, segida honen limitea, Neumann-en problemaren ebazpena dela dakigu. Beraz, $l<0$ deneko kasu honetan, (u_ε) problema zeiharren ebazpenen familia bornatuta dago eta azpisegida konbergente bat du, zeinaren limitea ez-nulua eta Neumann-en problemaren ebazpena den.

BIBLIOGRAFIA.

BIBLIOGRAFIA.

(1) ADAMS, R.A.
"Sobolev Spaces"
Academic Press.1.975.

(2) AGMON, S.-DOUGLIS, A.-NIREMBERG, L.
"Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I"
Comm. Pure Appl. Math.12. 1.959.

(3) BARROS-NETO, J.
"An Introduction to the Theory of distributions"
Marcel Deekker, Inc.New York.1973.

(4) BERESTYCKI, H.-LIONS, P.L.
"Existence of solutions for nonlinear scalar field equations, I. The ground state"
Arch. Rat. Mech. Anal.

(5) BREZIS, H.
"Analyse Fonctionelle.Théorie et applications"
Masson, Paris. 1.983.

(6) COURANT, R-HILBERT, D.
"Methods of mathematical physics.Vol I"
Interscience,1.962.

(7) DIEUDONNE, J.
"Eléments d'analyse"
Gauthier-Villars.Paris.1.969.

(8) FRIEDMAN, A.
"Foundations of Modern Analysis"
Holt, Rinehart and Winston, Inc.1.970.

(9) GILBARD, D-TRUDINGER, N.
"Elliptic partial differential equations of second order"
Springer, 1.977.

(10) KRASNOSELSKI, M.A.
"Topological methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations"
The MacMillan Company.New York.1.964.

(11) LIONS, J.L.
"Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires"
Dunod,Paris.1.969.

(12) LIONS, J.L.-MAGENES, E.
"Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol I et II"
Dunod,Paris.1.968.

(13) PROTTER, M-WEINBERGER, H.
"Maximum principles in differential equations"
Prentice-Hall, Inc.1.967.

(14) RABINOWITZ, P.H.
"Variational methods for nonlinear eigenvalue problems in Eigenvalues of Nonlinear Problems"
Cime.Cremonese.1.974.

(15) RAVIART, P.A.-THOMAS, J.M.
"Introduction a l'analyse numérique des équations aux derivées partielles"
Masson.Paris.1.983.

(16) VAINBERG, M.M,
"Variational methods for the study of nonlinear operators"
Holden Day.San Francisco.1.964.

(17) VO-KHAC KHOAN.
"Distibutions.Analyse de Fourier.Opérateurs aux Derivées Partielles"
Librairie Vuibert.Paris.1.972.

HIZTEGIA.

HIZTEGIA.

AHULKI KONBERGENTE	....	DEBILMENTE CONVERGENTE
ANALISI FUNTZIONAL	....	ANALISIS FUNCIONAL
AUTOBALIO	....	AUTOVALOR
AUTOBALIO-PROBLEMA	....	PROBLEMA DE AUTOVALORES.
AUTOELEMENTU	....	AUTOELEMENTO
AUTOFUNTZIO	....	AUTOFUNCION
AZTARREN	....	TRAZA
AZTARREN APLIKAZIO	....	APLICACION TRAZA
AZTARREN ERAGILE	....	OPERADOR TRAZA
AZTARREN-TEOREMA	....	TEOREMA DE TRAZAS
AZTARREN-TEORIA	....	TEORIA DE TRAZAS
BALIOKIDE (NORMA)	....	(NORMA) EQUIVALENTE
BALIO KRITIKO	....	VALOR CRITICO
BANAKETA	....	DISTRIBUCION
BANAKETEN ESPAZIO	....	ESPACIO DE LAS DISTRIBUCIONES
BANAKETEN ZENTZUAN	....	EN EL SENTIDO DE LAS DISTRIBUCIONES
BARIETATE	....	VARIEDAD
BARIETATE ERREGULAR	....	VARIEDAD REGULAR

BEHETIK ERDIJARRAI	.. SEMICONTINUA INFERIORMENTE
BIDERKADURA ESKALAR	.. PRODUCTO ESCALAR
BIRFINKETA	.. REFINAMIENTO
BIRFINKETA LOKALKI FINITU	.. REFINAMIENTO LOCALMENTE FINITO
BOLA	.. BOLA
BORNAPEN-BALDINTZA	.. CONDICION DE ACOTACION
DEFORMAZIO-TEOREMA	.. TEOREMA DE DEFORMACION
DENTSO	.. DENSO
DERIBATU	.. DERIVADA
DERIBATU NORMAL	.. DERIVADA NORMAL
DERIBATU DIREKZIONAL	.. DERIVADA DIRECCIONAL
DIFERENTZIAL	.. DIFERENCIAL
DUAL	.. DUAL
EBAZPEN	.. SOLUCION
EBAZPENEN EXISTENTZI TEOREMA	.. TEOREMA DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES
EBAZPEN MAXIMAL	.. SOLUCION MAXIMAL
EKUAZIO AUTONOMO	.. ECUACION AUTONOMA
EKUAZIO ELIPTIKO ERDILINEAL	.. ECUACION ELIPTICA SEMILI- NEAL.
EKUAZIO ELIPTIKO EZ-LINEAL	.. ECUACION ELIPTICA NO LINE AL

ELEMENTU PROPIO	.. ELEMENTO PROPIO
ERAGILE	.. OPERADOR
ERAGILE DIFERENTZIAL	.. OPERADOR DIFERENCIAL
ERAGILE ELIPTIKO	.. OPERADOR ELIPTICO
ERAGILE LINEAL JARRAI	.. OPERADOR LINEAL CONTINUO
ERAGILE TRINKO	.. OPERADOR COMPACTO
ERDINORMA	.. SEMINORMA
ERREFLEXIBO	.. REFLEXIVO
ERREGULAR	.. REGULAR
ESPAZIO ERREFLEXIBO	.. ESPACIO REFLEXIVO
ESPAZIO FUNTZIONAL	.. ESPACIO FUNCIONAL
ESTIMAZIO	.. ESTIMACION
FORMA BILINEAL (SIMETRIKO) (JARRAI)	..FORMA BILINEAL (SIMETRICA) (CONTINUA)
FORMULAZIO	.. FORMULACION
FORMULAZIO AHUL	.. FORMULACION DEBIL
FORMULAZIO BARIAZIONAL	.. FORMULACION VARIACIONAL.
FORMULAZIO SENDO	.. FORMULACION FUERTE
FUNTZIONAL	.. FUNCIONAL
GAINAZAL-NEURRI	.. MEDIDA DE SUPERFICIE

GRADIENTE BEKTORE	....	VECTOR GRADIENTE
GRADU	....	GRADO
GRADUAREN TEORIA	....	TEORIA DEL GRADO
GREEN-EN FORMULA	....	FORMULA DE GREEN
HILBERT-EN ESPAZIO	....	ESPACIO DE HILBERT
HOLDER-EN DESBERDINTZA	....	DESIGUALDAD DE HOLDER
JARRAITASUN-KONSTANTE	....	CONSTANTE DE CONTINUIDAD
KARTA LOKAL	....	CARTA LOCAL
KANPO-NORMAL (UNITARIO)	....	NORMAL EXTERIOR (UNITARIA)
KOERTZIBO	....	COERCIVO, COERCITIVO
KONBERGENTZIA AHUL	....	CONVERGENCIA DEBIL
KONBERGENTZIA GAINDITU	....	CONVERGENCIA DOMINADA
KONBERGENTZIA SENDO	....	CONVERGENCIA FUERTE
KONJOKATU	....	CONJUGADO
LAPLACE-REN EKUAZIO	....	ECUACION DE LAPLACE
LAPLACETAR	....	LAPLACIANO
LAPLACETARRAREN AUTOBALIO	....	AUTOVALOR DEL LAPLACIANO
LIMITE	....	LIMITE
LIMITE AHUL	....	LIMITE DEBIL

LIMITE SENDO	... LIMITE FUERTE
LIPSCHITZEAR	... LIPSCHITZIANA
LOKALKI	... LOCALMENTE
LOKALKI FINITU	... LOCALMENTE FINITO
LOKALKI LIPSCHITZEAR	... LOCALMENTE LIPSCHITZIANA
MAXIMOAREN PRINTZIPIO	... PRINCIPIO DEL MAXIMO
MAXIMOAREN PRINTZIPIO SENDO	... PRINCIPIO FUERTE DEL MAXIMO
METODO BARIAZIONAL	... METODO VARIACIONAL
METODO TOPOLOGIKO	... METODO TOPOLOGICO
MENDILEPOAREN TEOREMA	... TEOREMA DEL PASO DE MONTAÑA
MONOTONI METODO	... METODO DE LA MONOTONIA
MUGAKO BALDINTZA	... CONDICION DE FRONTERA
MUGAKO BALDINTZA ZEIHAR	... CONDICION DE FRONTERA OBLICUA
MULTIINDIZE	... MULTIINDICE
MURRIZPEN	... RESTRICCION
OINARRI ORTONORMAL	... BASE ORTONORMAL
PARTEKOTASUN	... INCLUSION
POISSON-EN EKUAZIO	... ECUACION DE POISSON

POTENTZIALAREN EKUAZIO	.. ECUACION DEL POTENCIAL
POTENTZIALAREN TEORIA	.. TEORIA DEL POTENCIAL
PSEUDOGRADIENTE BEKTORE	.. VECTOR PSEUDOGRADIENTE
PSEUDOGRADIENTE BEKTOREEN EREMUA	.. CAMPO DE VECTORES PSEUDO-GRADIENTE
PROBLEMA ELIPTIKO	.. PROBLEMA ELIPTICO
PROBLEMA ELIPTIKO ERDILINEAL	.. PROBLEMA ELIPTICO SEMILINEAL
PROBLEMA ELIPTIKO EZ-LINEAL	.. PROBLEMA ELIPTICO NO LINEAL
PUNTU KRITIKO	.. PUNTO CRITICO
RAYLEIGH-EN ZATIDURA	.. COCIENTE DE RAYLEIGH
SENDOKI KONBERGENTE	.. FUERTEMENTE CONVERGENTE
SOBOLEV-EN ESPAZIO	.. ESPACIO DE SOBOLEV
SOBOLEV-EN INJEKZIO	.. INYECCION DE SOBOLEV
TEORIA ESPEKTRAL	.. TEORIA ESPECTRAL
TOPOLOGIA AHUL	.. TOPOLOGIA DEBIL
TOPOLOGIA SENDO	.. TOPOLOGIA FUERTE
ZELADURA-PUNTUA	.. PUNTO DE ENSILLADURA
ZELADURA-PUNTUAREN TEOREMA	.. TEOREMA DEL PUNTO DE ENSI-LLADURA