Littlewood–Paley-ren teoria: teoria klasikotik Rubio de Francia-ren funtzio karratura

Luz Roncal

Basque Center for Applied Mathematics, Ikerbasque, eta Euskal Herriko Unibertsitatea

Matematikari Euskaldunen VI. Topaketak

Eibar, 2024ko ekainaren 17a

Fourier-ren analisia

Joseph Fourier (1768–1830). Iturria: Wikipedia

Oinarrizko ideia: Funtzio periodikoak oinarrizko uhinen batura gisa irudikatzea, sinuak eta kosinuak bezala

Fourier-ren analisia

Joseph Fourier (1768–1830). Iturria: Wikipedia

Oinarrizko ideia: Funtzio periodikoak oinarrizko uhinen batura gisa irudikatzea, sinuak eta kosinuak bezala

f periodikoa emanda, galdetzen dugu ea

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

anplitude a_n, b_n batzuetarako

Fourier-ren analisia

Joseph Fourier (1768–1830). Iturria: Wikipedia

Oinarrizko ideia: Funtzio periodikoak oinarrizko uhinen batura gisa irudikatzea, sinuak eta kosinuak bezala

Oinarrizko estrategia Analisi Harmonikoan:

funtzio bat aztertzeko, zati sinpleagotan deskonposatu

"banatu eta konkistatu"

Oinarrizko definizioak eta propietateak

Izan bedi $f : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, f*-ren Fourierren transformatua*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R} \text{ bakoitzeko}$$

Oinarrizko definizioak eta propietateak

Izan bedi $f : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, f*-ren Fourierren transformatua*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R} \text{ bakoitzeko}$$

Izan bedi $f : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, f*-ren alderantzizko Fourierren transformatua*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \check{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R} \text{ bakoitzeko}$$

Oinarrizko definizioak eta propietateak

Izan bedi $f : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, f-*ren Fourierren transformatua*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R} \text{ bakoitzeko}$$

Izan bedi $f : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, f-*ren alderantzizko Fourierren transformatua*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \check{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R} \text{ bakoitzeko}$$

Teorema (Plancherelen identitatea)

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Gogoratu

- $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < \infty$
- $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$

"Banatu eta konkistatu"

Funtzio bat hobeto aztertzeko, zati dezakegu

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j(x)$$

“Banatu eta konkistatu”

Funtzio bat hobeto aztertzeko, zati dezakegu

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j(x)$$

Horretarako, Fourierren transformatua erabili dezakegu: idatzi $\mathbb{R} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} I_j$ non $\{I_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ tarte disjuntuen bilduma den; orduan, $\xi \in \mathbb{R}$ bakoitzarentzat,

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{I_j}(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{I_j}(\xi)\widehat{f}(\xi) =: \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f_j}(\xi)$$

"Banatu eta konkistatu"

Funtzio bat hobeto aztertzeko, zati dezakegu

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j(x)$$

Horretarako, Fourierren transformatua erabili dezakegu: idatzi $\mathbb{R} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} I_j$ non $\{I_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ tarte disjuntuen bilduma den; orduan, $\xi \in \mathbb{R}$ bakoitzarentzat,

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{I_j}(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{I_j}(\xi)\widehat{f}(\xi) =: \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f_j}(\xi)$$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}^{-1}$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f_j}\Big)(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f_j})(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j(x)$$

Ortogonaltasuna?

- **Ondorioa: Fourierren transformatuaren L^2-ortogonalitatea**

Izan bitez $\{I_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ tarte disjuntuen bilduma, $\mathbb{R} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} I_j$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, eta definitu

$$\widehat{f_j}(\xi) := \mathbf{1}_{I_j}(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

Orduan,

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \Big\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j \Big\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|f_j\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

Ortogonaltasuna?

- **Ondorioa: Fourierren transformatuaren L^2-ortogonalitatea**

Izan bitez $\{I_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ tarte disjuntuen bilduma, $\mathbb{R} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} I_j$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, eta definitu

$$\widehat{f_j}(\xi) := \mathbf{1}_{I_j}(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

Orduan,

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \Big\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j \Big\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|f_j\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

- **Galdera:** FTak ba al du ortogonalitate-propietatea $L^p(\mathbb{R})$-n $p \neq 2$?

Ortogonaltasuna?

- **Ondorioa: Fourierren transformatuaren L^2-ortogonalitatea**

Izan bitez $\{I_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ tarte disjuntuen bilduma, $\mathbb{R} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} I_j$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, eta definitu

$$\widehat{f_j}(\xi) := \mathbf{1}_{I_j}(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

Orduan,

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \Big\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j \Big\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|f_j\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

- **Galdera:** FTak ba al du ortogonalitate-propietatea $L^p(\mathbb{R})$-n $p \neq 2$?

Zoritxarrez, oro har, $p \neq 2$ bada

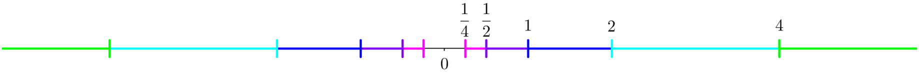
$$\Big\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j \Big\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \neq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|f_j\|^p_{L^p(\mathbb{R})}$$

Funtzio karratua eta Littlewood-Paley-ren teoria

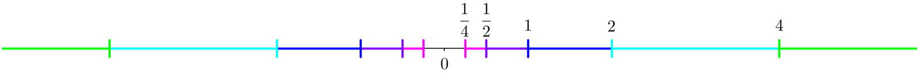
$\mathbb{R}$ zatitzen dugu tarte diadikoak erabiliz

$$\mathbb{R} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} J_j := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (-2^{j+1}, -2^j] \cup [2^j, 2^{j+1}) = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \{\xi \in \mathbb{R} : 2^j \leq |\xi| < 2^{j+1}\}$$

Funtzio karratua eta Littlewood-Paley-ren teoria



Funtzio karratua eta Littlewood-Paley-ren teoria



$j \in \mathbb{Z}$ bakoitzeko, Δ_j eragilea definitzen dugu hurrengo formularen bidez

$$\mathcal{F}\left(\Delta_j f\right)(\xi) = \mathbf{1}_{J_j}(\xi)\widehat{f}(\xi) = \mathbf{1}_{\{|\xi|\sim 2^{j+1}\}}(\xi)\widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

eta hurrengo Funtzio Karratua definitzen dugu

$$Pf(x) := \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j f(x)|^2\Big)^{1/2}$$

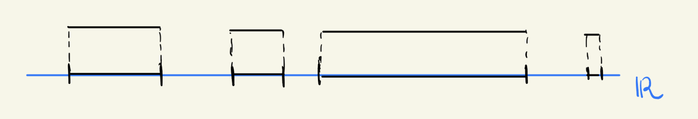
orduan

J. E. Littlewood, R. E. A. C. Paley, 1937:

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \sim_p \Big\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Funtzio karratuak eta Littlewood–Paley-ren teoria

- Egoera orokorragoak → deskonposizio orokorragoak
- Maiztasun-tarte disjuntuen segida arbitrarioekin lotutako FK



proiekzio "zimurrak"

J. L. Rubio de Francia 1985:

$$\Big\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |S_{I_j} f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad 2 \le p < \infty$$

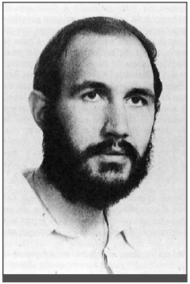
non $\{I_j\}$ tarte disjuntuen segida bat den eta $\widehat{S_{I_j} f}(\xi) := \mathbf{1}_{I_j}(\xi)\widehat{f}(\xi)$

Funtzio karratuak eta Littlewood–Paley-ren teoria

J. L. Rubio de Francia 1985:

$$\Big\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|S_{I_j}f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R})},\quad 2\leq p<\infty$$

non $\{I_j\}$ tarte disjuntuen segida bat den eta $\widehat{S_{I_j}f}(\xi):=\mathbf{1}_{I_j}(\xi)\widehat{f}(\xi)$



José Luis Rubio de Francia