Kapazidade Frakzionarioak

eman ta zabal zazu

Javier Canto – Matematika saila UPV/EHU

Matematikari Euskaldunen VI. topaketa – Eibar, 2024ko ekainak 17a

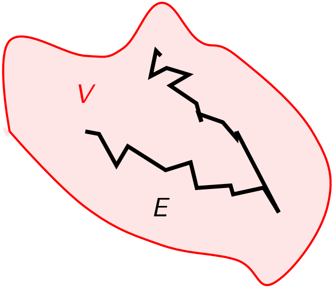
Newtonen kapazidadea

Izan bitez $E \subset V$, E itxia eta V irekia, $\mathbb{R}^n$-n
(V, E) kondentsadorearen kapazidadea:

$$\mathrm{cap}(V, E) = \inf \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx$$

non u funtzioak betetzen duen:

- $u(x) = 1$, $x \in E$
- $u(x) = 0$ $x \notin V$
- $u \in H^1(V) \cap C(V)$



Deribatu frakzionarioak: Hajłaszen gradientea

Gogoratu bataz-besteko balioaren teorema: $|f(x) - f(y)| \leq |\nabla f(z)|\,|x - y|$

Izan bedi $0 < \beta \leq 1$. $g \geq 0$ funtzioa u funtzioaren Hajłaszen β-goi-gradientea da:

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{\beta}\big(g(x) + g(y)\big)$$

- $g \in \mathcal{H}_\beta(u)$ idazten dugu
- $\mathcal{H}_\beta(u) \subset \mathcal{H}_\gamma(u)$, $\gamma < \beta$ denean
- $g = \infty$ beti da goi-gradientea
- $g = |\nabla u| \in \mathcal{H}_1(u)$
- u β-Hölder bada, $g = c \in \mathcal{H}_\beta(u)$

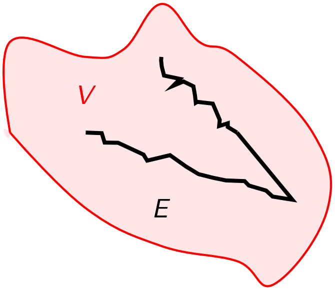
Hajłaszen kapazidadea

Izan bitez V irekia, $E \subset V$, $d(E, V^c) > 0$
(E, V) kondentsadorearen (β, p)-kapazidadea:

$$\mathrm{cap}_{\beta,p}(E, V) = \inf_{u} \inf_{g \in \mathcal{H}_\beta(u)} \int_X g(x)^p d\mu(x)$$

non u funtzioak betetzen duen:

- u funtzio *ona* da
- $u(x) = 1$, $x \in E$
- $u(x) = 0$, $x \notin V$

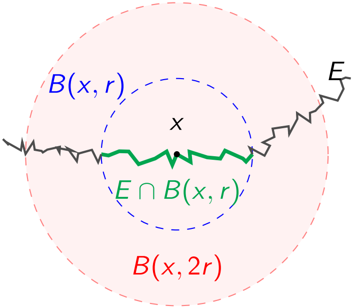


Kapazidadearen dentsitate baldintza (KDB)

E multzo itxiak (β, p)-kapazidadearen dentsitate baldintza betetzen du baldin eta

$$\mathrm{cap}_{\beta,p}(E \cap \overline{B(x,r)}, B(x,2r)) \gtrsim r^{-\beta p}\mu(B(x,r))$$

- $x \in E$
- $0 < r < \mathrm{diam}(E)$

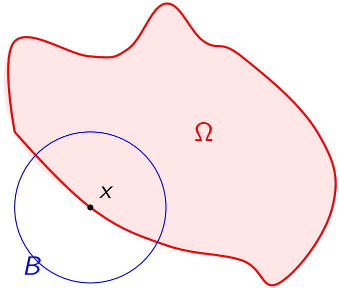


Poincaréren muga-desberdinta lokala (PMDL)

Ω multzo irekiak (β, p)-PMDL betetzen du:

$$\int_B |u(x)|^p d\mu(x) \lesssim \operatorname{diam}(B)^{\beta p} \int_B g(x)^p d\mu(x)$$

- $u(x) = 0$, $x \notin \Omega$
- u funtzioa *ona* da
- $g \in \mathcal{H}_\beta(u)$



Teorema

Ω irekiak (β, p)-PMDL betetzen du $\Leftrightarrow$ $\partial\Omega$ mugak (β, p)-KDB betetzen du

Baldintza geometrikoa: kodimentsioa

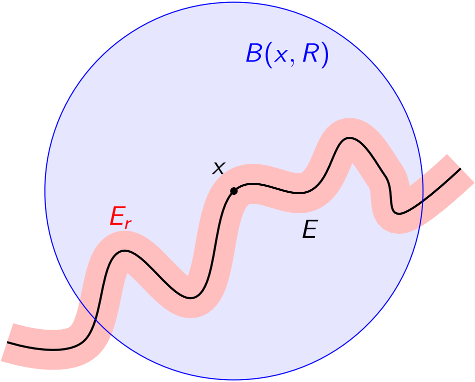
$\mathrm{codim}_A(E) = q$ da baldin eta:

$$\frac{\mu(E_r \cap B(x,R))}{\mu((B(x,R))} \simeq \left(\frac{r}{R}\right)^q$$

- $x \in E$
- $0 < r < R < \mathrm{diam}(E)$

Adibideak $\mathbb{R}^n$ espazioan:

- Puntu baten kodimentsioa: n
- m-gainazala: $n - m$



Teorema

E multzo itziak (β, p)-KDB betetzen du $\iff$ $\mathrm{codim}_A(E) < \beta p$

Korolarioa: Ek (β, p)-KDB betetzen du $\Rightarrow$ Ek $(\beta - \varepsilon, p - \varepsilon)$-KDB betetzen du

Kapazidade Frakzionarioak

Eskerrik asko!