Hiru (eta $N > 3$) gorputzen problemaren serie bidezko soluzioa

Ander Murua

Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

Matematikari Euskaldunen VI. Topaketak,
Eibar, 2024ko ekainaren 17a

Hiru gorputzen problema

Hiru gorputz (dentsitate uniformeko hiru esfera) m_1, m_2, m_3 masadunak.

Helburua: Newton-en grabitazio legearen arabera, Hiru gorputzen erdiguneen $q_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ $(i = 1, 2, 3)$ koordenatuen eboluzioa $\forall t \in \mathbb{R}$?

Ekuazioak:

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = \frac{G\, m_j}{||q_j - q_i||^3}(q_j - q_i) + \frac{G\, m_k}{||q_k - q_i||^3}(q_k - q_i).$$

Unitate egokiekin, $G = 1$.

Datuak:

- $m_1, m_2, m_3 > 0$,
- $q_i(0) = (x_i(0), y_i(0), z_i(0))$ hasierako posizio-koordenatuak,
- $\dot{q}_i(0) = (\dot{x}_i(0), \dot{y}_i(0), \dot{z}_i(0))$ hasierako abiadura-bektoreak,

Soluzioa: $q_i(t) =?$, $i = 1, 2, 3$.

Ekuazio diferentzialen berredura-serie bidezko soluzioa

Berredura serieen eragileak: $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \in \mathbb{R}[[t]]$ bakoitzerako

$$f \mapsto f' = \sum_{n=0}^{\infty} n f_n t^{n-1}, \quad f \mapsto \int f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} f_n t^{n+1}.$$

Serie bidezko ebazpenaren adibidea

$$\rho'' = \frac{\rho}{(2-\rho^2)^{3/2}}, \quad \rho(0) = 1, \quad \rho'(0) = 1.$$

Modu baliokidean,

$$\rho = 1 + t + \int\int \frac{\rho}{(2-\rho^2)^{3/2}}.$$

Soluzioa:

$$\rho = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{7}{6}t^4 + \frac{73}{30}t^5 + \cdots$$

Serie hau konbergentea da $|t| < |t^*| = 0.30273\cdots$ denean.

Hiru gorputzeko problemaren berridazketa

Aldagai aldaketa:

$$q_i \quad (i = 1, 2, 3) \longrightarrow q_{ij} = q_j - q_i, \quad (i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}.$$

Ekuazioak:

$$\frac{d^2 q_{ij}}{dt^2} = -\frac{m_i + m_j}{\|q_{ij}\|^3} q_{ij} - \frac{m_k}{\|q_{ki}\|^3} q_{ki} - \frac{m_k}{\|q_{jk}\|^3} q_{jk}$$

Modu baliokidean,

$$\begin{aligned} \frac{dq_{ij}}{dt} &= v_{ij}, \\ \frac{dv_{ij}}{dt} &= -\frac{m_i + m_j}{\|q_{ij}\|^3} q_{ij} - \frac{m_k}{\|q_{ki}\|^3} q_{ki} - \frac{m_k}{\|q_{jk}\|^3} q_{jk}. \end{aligned}$$

Datuak:

- $m_1, m_2, m_3 > 0$,
- $q_{ij}(0) \in \mathbb{R}^3$, hasierako posizio erlatiboen koordenatuak,
- $v_{ij}(0) \in \mathbb{R}^3$, hasierako abiadura-bektore erlatiboak.

Soluzioa: $q_{ij}(t) =?, \quad (i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$.

Berredura-serie bidezko adierazpena:

$$q_{ij}(t) = q_{ij}(0) + \dot{q}_{ij}(0)\, t + q_{ij2}\, t^2 + q_{ij3}\, t^3 + \cdots$$

Konbergentea $t \in \mathbb{R}$ guztietarako? Soilik $|t| < R$ denean. Oro har,

$$R = R(q_{12}(0), q_{23}(0), q_{31}(0), v_{12}(0), v_{23}(0), v_{31}(0)) < \infty.$$

Bi gorputzeko problemaren kasuan ere hala gertatzen da!

Soluzioaren serie garapenaren konbergentzia erradioa

Idazkera: $q := (q_{12}, q_{23}, q_{31})$, $v := (v_{12}, v_{23}, v_{31})$,
Konbergentzia erradioa $= R(q(0), v(0))$.

Talkak denbora konplexuan eta $R(q(0), v(0))$

Demagun $t^* \in \mathbb{C}$.

$$\exists (i,j) \text{ non } \lim_{t \to t^*} \|q_{ij}(t)\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad R(q(0), v(0)) \leq |t^*|.$$

Teorema (Antoñana, Chartier, Makazaga, Murua (2020))

$R(q,v) \geq \frac{1}{4} L(q,v)^{-1}$ *non* $L(q,v) = \max(\mu(q,v), \sqrt{\nu(q)})$,

$$\mu(q,v) = \max_{(i,j)} \frac{\|v_{ij}\|}{\|q_{ij}\|}, \quad \nu(q) = \max_{(i,j)} \frac{\|M_{ij}(q)\|}{\|q_{ij}\|},$$

eta

$$M_{ij}(q) = \frac{m_i + m_j}{\|q_{ij}\|^2} + \frac{m_k}{\|q_{jk}\|^2} + \frac{m_k}{\|q_{ki}\|^2}.$$

Bi gorputzeko problemaren soluzioaren serie bidezko adierazpen parametrikoa

Demagun $q_{12}(0) \in \mathbb{R}^3$ eta $v_{12}(0) \in \mathbb{R}^3$ hasierako egoerarako,

$$\frac{d}{dt} q_{12} = v_{12}, \quad \frac{d}{dt} v_{12} = -\frac{m_1 + m_2}{\|q_{12}\|^3} q_{12},$$

bi gorputzeko problemaren soluzioa $q_{12}(t)$ dela. Definitu $t \mapsto \tau(t)$

$$\frac{d\tau}{dt} = \|q_{12}(t)\|^{-1}, \quad \tau(0) = 0.$$

Soluzioaren serie konbergente bidezko adierazpen parametrikoa

$\exists! \{\theta_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ segida errealak, non

$$\begin{aligned} t = \theta(\tau) &:= \|q_{12}(0)\| \, \tau + \theta_2 \, \tau^2 + \theta_3 \, \tau^3 + \cdots , \\ q_{12}(t) = Q_{12}(\tau) &:= (1 + a_1 \, \tau + a_2 \, \tau^2 + a_3 \, \tau^3 + \cdots) \, q_{12}(0) \\ &\quad + (b_1 \, \tau + b_2 \, \tau^2 + b_3 \, \tau^3 + \cdots) \, v_{12}(0). \end{aligned}$$

Serie hauek konbergenteak dira $\tau \in \mathbb{R}$ guztietarako!

Hain zuzen, katearen erregelaren ondorioz, $t = \theta(\tau)$ eta $Q_{12}(\tau)$ ondoko problema ebatziz lor daiteke:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\theta &= \|Q_{12}\|, \\
\frac{d}{d\tau}Q_{12} &= \|Q_{12}\| V_{12}, \\
\frac{d}{d\tau}V_{12} &= -\|Q_{12}\| \frac{m_1 + m_2}{\|Q_{12}\|^3} Q_{12}, \\
\theta(0) = 0, \quad & Q_{12}(0) = q_{12}(0), \quad V_{12}(0) = v_{12}(0).
\end{aligned}$$

Eta beraien berredura serieko adierazpena ekuazio horietatik kalkula daiteke.

Aurrekariak: Diritchlet-ek (1859an hil baino zerbait lehenago) Kronecker-i adierazi zion N-gorputzeko problema ebazteko metodo bat aurkitu zuela. Eta Eguzki Sistemaren egonkortasuna frogatu zuela.

Suediako eta Norbegiako Oskar II erregearen 60. urtebetetzeko lehiaketa (1989)

Epaimahaia: Gösta Mittag-Leffler, Karl Waierstrass, Charles Hermite.

Helburua: N gorputzeko problemaren soluzioaren serie konbergente bidezko adierazpen parametrikoa (talkarik ez dagoela suposatuz)

Irabazlea: Henri Poincaré, hiru gorputzaren problemaren inguruko bere lanarengatik. Jatorrizko problema ez zuen ebatzi.

Lehiaketako 1. problemaren ebazpena $N = 3$ kasurako (Karl F. Sundman, 1912)

Teorema (Sundman, 1912)

Demagun $q_{ij}(0) \in \mathbb{R}^3$ *eta* $v_{ij}(0) \in \mathbb{R}^3$, $(i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ *hasierako egoerarako momentu angeluarra ez dela* $(0,0,0)$. *Existitzen dira* $\sigma \mapsto \theta(\sigma)$ *eta* $\sigma \mapsto Q_{ij}(\sigma)$ *analitikoak* $|\sigma| < 1$ *disko konplexuan, non*

- $\theta(0) = 0, \ \lim_{\sigma \to 1} \theta(\sigma) = +\infty, \ \lim_{\sigma \to -1} \theta(\sigma) = -\infty,$
- $q_{ij}(\theta(\sigma)) = Q_{ij}(\sigma)$ *baldin* $|\sigma| < 1$.

Beraz, baldin $|\sigma| < 1$,

$$t = \theta(\sigma) = \theta_1 \, \sigma + \theta_2 \, \sigma^2 + \theta_3 \, \sigma^3 + \cdots ,$$
$$q_{ij}(t) = Q_{ij}(\sigma) = q_{ij}(0) + \theta_1 \, v_{ij}(0) \, \sigma + Q_{ij2} \, \sigma^2 + Q_{ij3} \sigma^3 + \cdots$$

Oskar II erregearen 60. urteurreneko saria irabazteko modukoa!

Sundman-en metodoa (1. urratsa)

Hiru gorputzeko problemaren soluzio bakoitzerako, $(q, v) \in \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^9 \mapsto s(q, v) \in \mathbb{R}$ funtzio analitiko egoki bat definitu, non ondoko problemaren soluzioaren τ-ren berredura serie garapenaren konbergentzia erradioa ≥ 1 den:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\theta &= s(Q, V), \\
\frac{d}{d\tau}Q_{ij} &= s(Q, V)V_{ij}, \\
\frac{d}{d\tau}V_{ij} &= -s(Q, V)\left(\frac{m_i + m_j}{\|Q_{ij}\|^3}Q_{ij} + \frac{m_k}{\|Q_{ki}\|^3}Q_{ki} + \frac{m_k}{\|Q_{jk}\|^3}Q_{jk}\right), \\
\theta(0) &= 0, \quad Q_{ij}(0) = q_{ij}(0), \quad V_{ij}(0) = v_{ij}(0).
\end{aligned}
$$

Horren ondorioz,

- $t = \theta(\tau)$, $q_{ij} = Q_{ij}(\tau)$ hiru gorputzeko problemaren soluzioaren adierazpen parametrikoa daukagu,
- $\theta(\tau)$ eta $Q_{ij}(\tau)$, τ aldagai konplexuaren funtzioa gisa, analitikoa da $\{\tau \in \mathbb{C} \ : |\mathrm{Re}(\tau)| \leq 1\} \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ eremu irekiren batean.

Sundman-en metodoa (2. urratsa)

- Aldagai independente berria hartu,

$$\sigma = \tanh(\pi\,\tau/4) = \frac{e^{\pi\tau/2} - 1}{e^{\pi\tau/2} + 1}$$

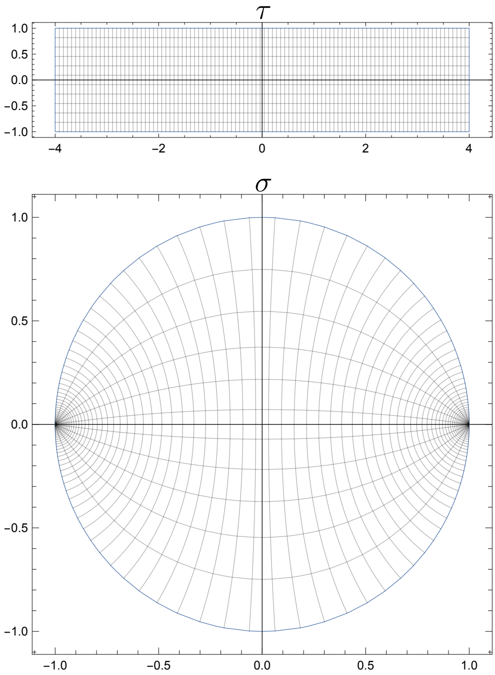
aplikazio analitiko bijektiboaren bidez. Ondorioz,

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{4}{\pi}(1-\sigma^2)^{-1}. \tag{1}$$

- $\{\tau \in \mathbb{C} \ : |\mathrm{Re}(\tau)| \leq 1\}$ eremua $\{\sigma \in \mathbb{C} \ : \ |\sigma| < 1\}$ diskoan trasformatzen du.
- Ondorioz, existitzen dira $\hat{\theta}(\sigma)$ eta $\hat{Q}_{ij}(\sigma)$ funtzio analitikoak disko unitarioan definituak, non

$$t = \theta(\tau) = \hat{\theta}(\sigma), \quad q_{ij}(t) = Q_{ij}(\tau) = \hat{Q}_{ij}(\sigma), \tag{2}$$

betetzen den baldin $|\sigma| < 1$.


τ
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−4
−2
0
2
4
σ
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

Praktikan, $t=\hat\theta(\sigma)$ eta $q_{ij}=\hat Q_{ij}(\sigma)$ funtzioen berredura serie garapenak kalkulatzeko, ondoko ekuazio diferentzialen sistemaren soluzio direla kontutan hartuz egin daiteke.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma}\hat\theta &= \frac{4}{\pi}\,(1-\sigma^2)^{-1}\, s(\hat Q,\hat V),\\
\frac{d}{d\sigma}\hat Q_{ij} &= \frac{4}{\pi}\,(1-\sigma^2)^{-1}\, s(\hat Q,\hat V)\hat V_{ij},\\
\frac{d}{d\sigma}\hat V_{ij} &= -\frac{4}{\pi}\,(1-\sigma^2)^{-1}\, s(\hat Q,\hat V)\left(\frac{m_i+m_j}{\|\hat Q_{ij}\|^3}\hat Q_{ij}\right.\\
&\qquad \left.+\frac{m_k}{\|\hat Q_{ki}\|^3}\hat Q_{ki}+\frac{m_k}{\|\hat Q_{jk}\|^3}\hat Q_{jk}\right),\\
\hat\theta(0)&=0,\quad \hat Q_{ij}(0)=q_{ij}(0),\quad \hat V_{ij}(0)=v_{ij}(0).
\end{aligned}
$$

Gogoratu, aurreko teorematik, $R(q,v) \geq L(q,v)^{-1}/4$ dugula.

Horretan oinarrituko gara $s(q,v)$ funtzio egoki bat aukeratzeko. Kontutan harturik $L(q,v) \leq \sqrt{A(q,v)^2 + B(q)}$, dugula, non

$$A(q,v) = \sum_{(i,j)} \frac{\|v_{ij}\|}{\|q_{ij}\|}, \quad B(q) = \sum_{(i,j)} \frac{\|M_{ij}(q)\|}{\|q_{ij}\|} \quad \text{diren.}$$

Teorema (Antoñana, Chartier, Murua (2022))

$$s(Q,V) = \frac{2}{25}\left(A(q,v)^2 + B(q)\right)^{-1/2},$$

funtzioak Sundman-en teoremako baldintzak betetzen ditu.

Sundman-ek proposatutako $s(Q,V)$ funtzioarekiko abantailak:

- Globalki definituta dago,
- Frogapen sinpleagoa,
- $m_k << m_i$ kasurako aplikagarria,
- N gorputzeko problemarako orokorpen zuzena.

Desabantaila: Sundman-en kasuan, bi gorputzen arteko talkak erregularizatzen dira. Gure kasuan ez.

Oharrak

1. Teorikoki, Waierstrass-en problemaren zentzuan, 3GP-ren soluzioa zehazki adieraz daiteke!
2. σ aldagaiarekiko berredura serie garapenak ez du apenas balio praktikorik. Oso astiro konbergitzen du t handitarako!
3. τ aldagaiarekiko adierazpen parametrikoa oso baliagarria da, gorputzen gerturatzeak dituen traiektorietarako:
   - Soluzio periodikoen Fourier-en serie garapenerako,
   - Bestelako soluzioak, denbora tarte finitutarako, Chebyshev-en serie bidez adierazteko,
   - Zenbakizko metodoak aplikatzeko.
4. Baina, hiru gorputzeko problemaren informazio kualitatiborik ez du ematen (egonkortasuna, izaera kaotikoa, ...)
5. Oskar II erregearen saria eman zion Poincaré-ren ikerlanean hiru gorputzeko problemaren ikuspuntu kualitatiboa lantzen zen besteak beste. Lehiaketara bidali zuen ikerlanak akats larriak zituen ordea! $\longrightarrow$ Izaera kaotikoaren aurkikuntza.