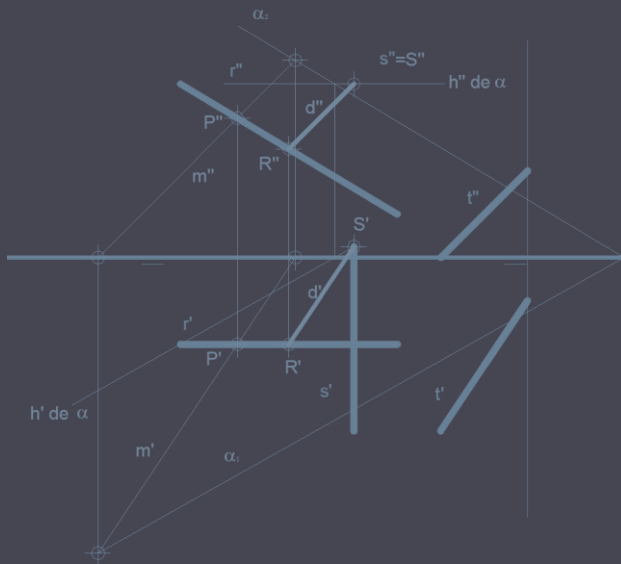


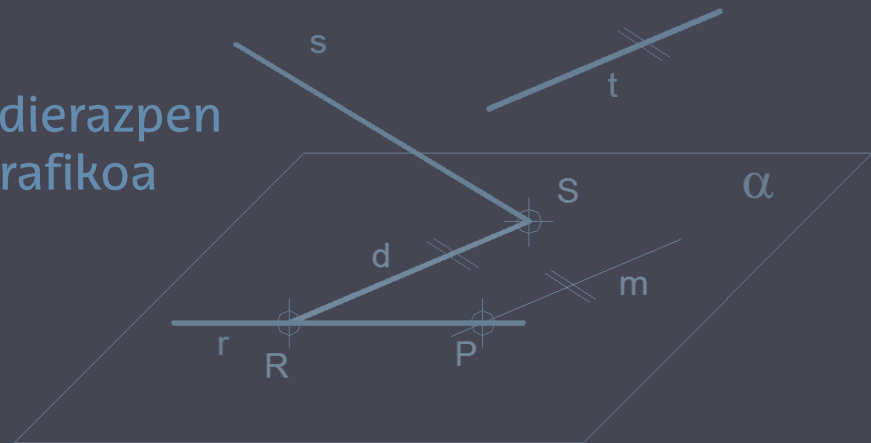
Geometriaren lanketa aljebran eta marrazketa teknikoan

I. Alvarez, E. Alberdi, A. Unzueta, I. Eguia, M.J. García
Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

Geometria lantzeko proiektua



Adierazpen
Grafikoa



$$r: \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ y = 2 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \end{cases} \quad t: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-2}.$$

Algebra

Aurrekariak

Bilboko Ingeniaritza Eskola. Meatzeen eta Herri Lanen Atala

Ingeniaritza Zibileko Gradua



Meatze eta Energia Teknologiaren Ingeniaritzako Gradua

Adierazpen Grafikoa I 6 K / 1. H	Mota	IKASGELAN	IKASGELAZ KANPO	GUZTIRA
	M*	60	90	150
	GA**	0	0	0
	GO***	0	0	0

Algebra eta Geometria 6 K / 1. H	Mota	IKASGELAN	IKASGELAZ KANPO	GUZTIRA
	M*	37,5	56,25	93,75
	GA**	15	22,5	37,5
	GO***	7,5	11,25	18,75

M* Magistrala
GA** Gelako Praktiak
GO*** Ordenagailu
praktiak

Proiektuaren helburuak

▪ Proiektuaren abiapuntua:

“Bi irakasgaien arteko erlazioa hausnartzea, bietan lantzen diren kontzeptu komunak identifikatuz eta ikasleak antzekotasunez ohartzea”

▪ Proiektuaren helburu nagusiak:

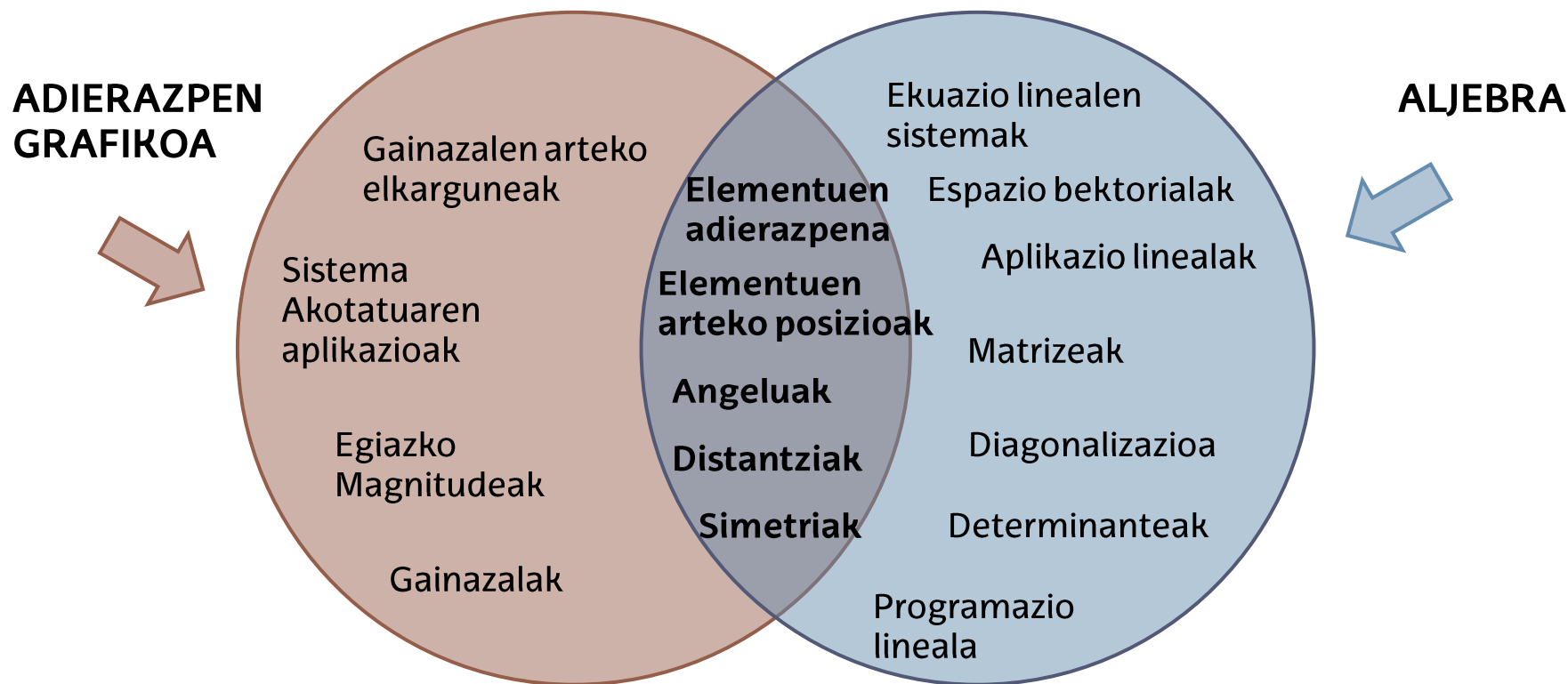
- Diziplina-arteko irakaskuntza jarduerak eta materialak diseinatzea ikasleen irakaskuntza-ikaskuntza prozesua hobetzeko.
- Elkarlanerako ikaskuntza sustatzea eta honela ikaslea jabetu dadin irakasgai ezberdinetan lantzen dituen komuneko kontzeptuez.
- Ikasleak jabetu daitezen irakasgai desberdinen gaineratik proiektu bakar baten parte direla.

Jarraitutako metodologia



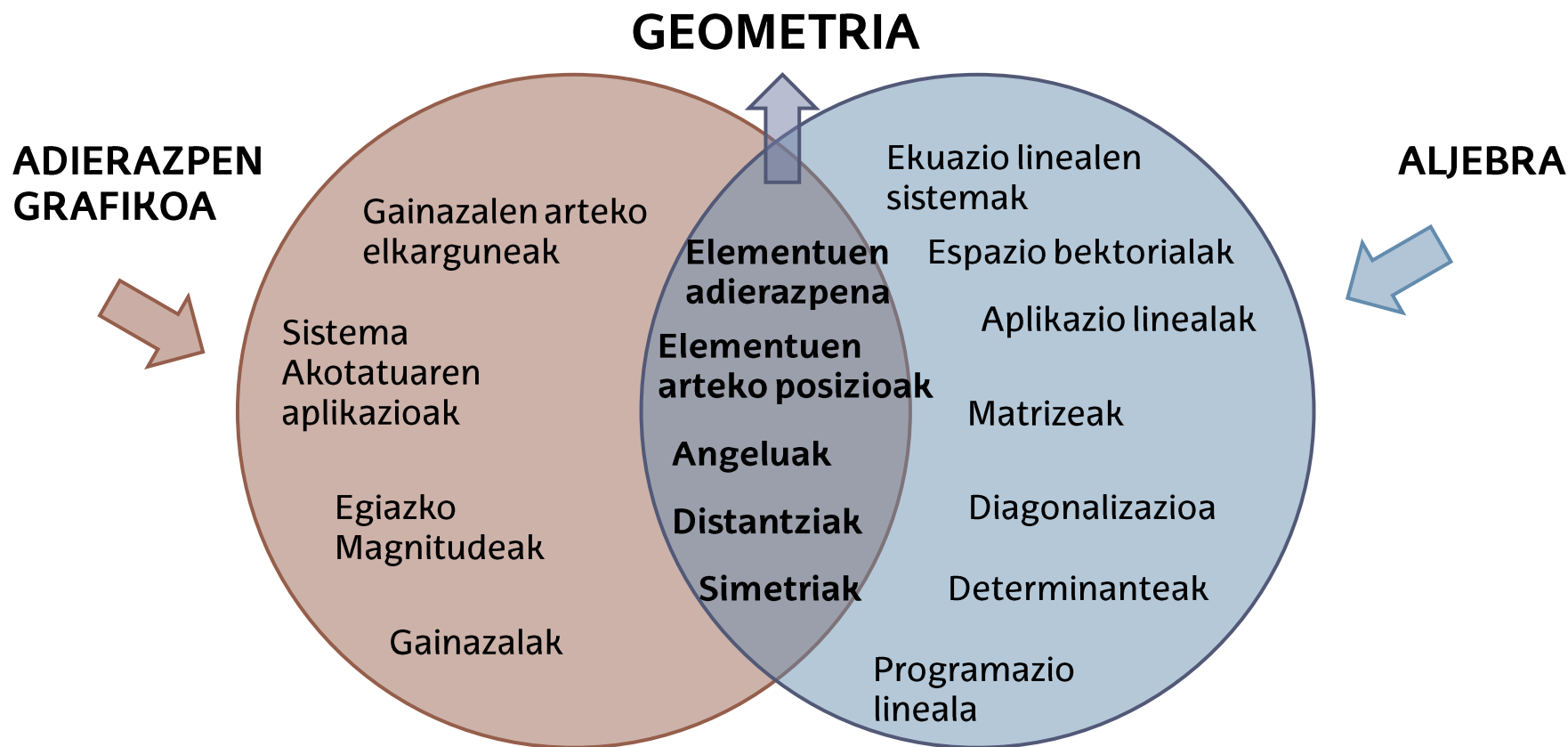
Gai-zerrenda

Bi irakasgaien komuneko kompetentziak landu, partekatzen dituzten kontzeptu eta gaiak aukeratuz. Guzti hauek **GEOMETRIA DESKRIPTIBOAREN** eta **GEOMETRIA AFINEAN** batzen dira.



Gai-zerrenda

Marrazketa Teknikoaren %25a eta Algebra eta Geometriaren %20a komuneko gaiak dira, klasean ikuspuntu desberdinekin lantzen direnak.

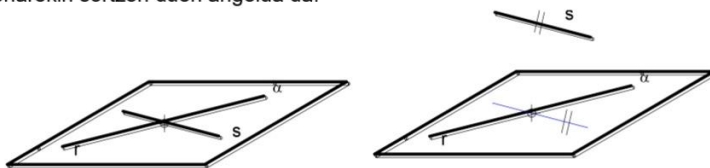


Sortutako materialak

Ikasmaterial teorikoak

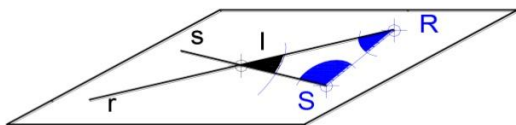
4.1.M – Bi zuzenen arteko angelua

Elkar ebakitzen duten bi zuzenen arteko angelua kalkulatzeko erraza da. Zuzenek elkar gurutzatzen badute, bi zuzenen arteko angelua, zuzen batek bere puntu batetik igarotzen den eta bestearekiko paraleloa den zuzenarekin sortzen duen angelua da.



Proiekzio ortogonalen sistemetan, bi zuzenen arteko angelua kalkulatzeko prozedura desberdinak daude.

Geometriaren ikuspuntutik, **RIS** triangelu baten angeluak eta triangeluaren aldeen luzera kalkulatu ebatz daitezke: **R**, **r** zuzeneko edozein puntu, **S**, **s** zuzeneko edozein puntu eta **I** bi zuzenen arteko ebaki-puntua izanik.

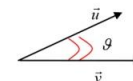


Geometria deskribatzailearen ikuspegitik, bi zuzenen arteko angeluaren ebazpenak, bi zuzenek sortzen duten plano posizio egokian egotean datza, honela angelu hori zuzenean ikusi ahal delako. Jarraitu ahal diren prozesuak hiru dira:

- 1) Eraispinak
- 2) Plano aldaketak
- 3) Biraketak

4.1.A – Bi zuzenen arteko angelua

Gogoratu, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ edozein bi bektoreen arteko angelua

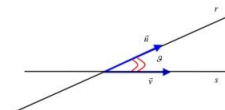


hurrengo espresioa erabiliz kalkulatzeko delat $\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

Bi zuzenen posizio erlatiboak hurrengoak dira: bat datoz, paraleloak dira, elkar ebakitzen dute, edo elkar gurutzatzen dute. Posizio hauen arabera hurrengoak dugu:

- Zuzen ebakitzailak: Bi zuzen elkar ebakitzen badira, binaka berdinak diren lau angelu zehazten dituzte. Angelu hauetako txikienari bi zuzenen arteko angelua deritzo.
- Elkar gurutzatzen duten zuzenak: Zuzen batekiko paraleloa eta beste zuzena ebakitzen duen zuzenaren eraiki ondoren, bilatzen ari garen angelua, elkar ebakitzen duten azkeneko bi zuzen hauen arteko angelurik txikiena da.
- Bat datozen zuzenak edo zuzen paraleloak: euren arteko angelua 0° da.

Bi zuzenen arteko angelua, euren norabide bektoreen arteko angeluarekin bat dator, azkeneko angelu hau, angelu zorrotza bada. Bi bektoreen arteko angelua kamutsa bada berriz, bi zuzenen arteko angelua, bere angelu betegarria izango da.



Beraz, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ norabide bektorea duen r zuzenaren eta $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ norabide bektorea duen s zuzenaren arteko angelua hurrengo formula erabiliz kalkula daitezke:

$$\theta = \text{ang}(r, s) = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \arccos \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Angelu kamutsa bada, bere angelu betegarria erabiliz:

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

Kasu konkritu bezala, r eta s zuzenak elkarzutak dira $\cos \theta = 0$ bada $\Rightarrow$

, hau da, $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$ bada.

Sortutako materialak

Ikasmaterial praktikoak

4.3. Ikasgai bietako adibideak

► 8 (A) Adibidea

$r: \begin{cases} x - z = 3 \\ 3y + z = 9 \end{cases}$ zuzena barnean duen eta XOY planoarekin 45° angelua osatzen duen planoak kalkulatu:

Emitza:

Plano sorta kontzeptua erabiliz, r zuzena barnean duen planoak hurrengoak dela dakigu:

$\pi_1: x - z - 3 + \alpha(3y + z - 9) = 0$, bere bektore normala $n_{\pi_1} = (1, 3\alpha, \alpha - 1)$ da.

Bestalde, $\pi_2: z = 0$ planoaren bektore normala $n_{\pi_2} = (0, 0, 1)$ da. Bi planoen arteko angelua bere bektore normalen arteko angelua da $\rightarrow$

$$\cos 45^\circ = \frac{|(1, 3\alpha, \alpha - 1)(0, 0, 1)|}{\sqrt{1^2 + (3\alpha)^2 + (\alpha - 1)^2} \sqrt{1}} = \frac{|\alpha - 1|}{\sqrt{10\alpha^2 - 2\alpha + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow$$

$$2(\alpha - 1)^2 = 10\alpha^2 - 2\alpha + 2 \rightarrow 4\alpha^2 + \alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

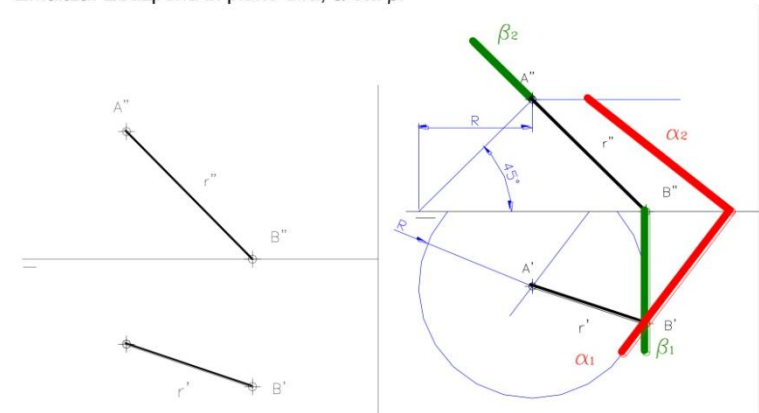
Balio hauek π_1 planoan ordezkatzuz, ondorengo bi planoak lortu ditugu:

$$\pi_{1a}: x - z - 3 \quad y \quad \pi_{1b}: 4x - 3y - 5z - 3 = 0$$

► 8(M) Adibidea

Defini eta irudika itzazu r zuzena barnean duten eta PH-rekin 45° angelua osatzen duten planoak

Emitza: Ebazpena bi plano dira, α eta β .

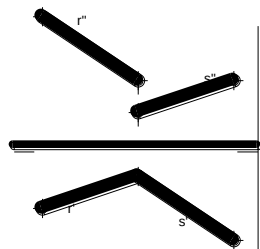


Sortutako materialak

Ikasleek beren kabuz egiteko ariketa-sorta

A.- Aurkitu r eta s zuzenen arteko angelua puntu hauetatik pasatzen direnak $(4,1,1)$ eta $(1,3,3)$.

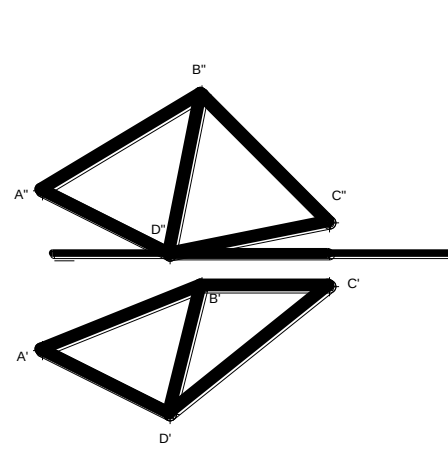
D.- Aurkitu r eta s zuzenen arteko angelua.



$A(13,3,2)$, $B(8,1,5)$, $C(4,1,1)$ eta $D(9,5,0)$ puntuak ematen dira, ABC eta BDC teillatu bereko bi plano direlarik.

- Defini ezazu ABD planoko zuzen bat, XOY planoarekiko pareleloa dena eta bere puntu guztiak 3 kota dutela jakinik.
- Defini ezazu BC zuzenaren erdiko puntutik abiatzen den ur-tanta baten ibilbidea.

ABC eta BDC teillatu baten bi plano dira. Marraztu ABD planoan 3 kotadun horizontal bat. Marraz ezazu BC zuzenaren erdiko puntutik abiatzen den ur-tanta baten ibilbidea.



Sortutako materialak

Ikasleek beren kabuz egiteko ariketa-sorta

A.- Aurkitu r eta s zuzenen arteko angelua puntu hauetatik pasatzen direnak $(4,1,1)$ eta $(1,3,3)$.

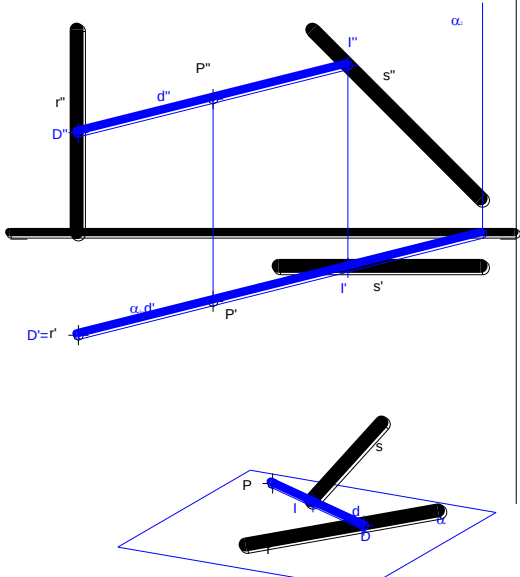
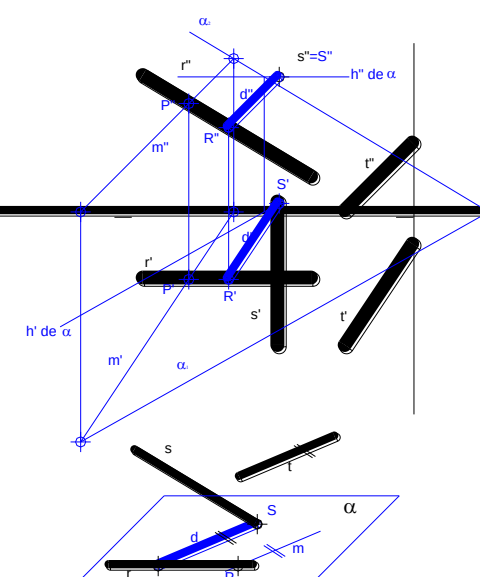
D.- Aurkitu r eta s zuzenen arteko angelua.

$A(13,3,2)$, $B(8,1,5)$, $C(4,1,1)$ eta $D(9,5,0)$ puntuak ematen dira, ABC eta BDC teilatu bereko bi plano direlarik.

- Defini ezazu ABD planoko zuzen bat, XOY planoarekiko pareleoa dena eta bere puntu guztiak 3 kota dutela jakinik.
- Defini ezazu BC zuzenaren erdiko puntutik abiatzen den ur-tanta baten ibilbidea.

ABC eta BDC teilatu baten bi plano dira. Marraztu ABD planoan 3 kotadun horizontal bat. Marraz ezazu BC zuzenaren erdiko puntutik abiatzen den ur-tanta baten ibilbidea.

Sortutako materialak

Determinar las rectas que contengan al punto $P = (9,2,4)$ y corten a la recta r que contiene a los puntos $(13,3,3)$ y $(13,3,0)$ y a la recta s que contiene a los puntos $(6,1,6)$ y $(1,1,1)$.	Determinar las rectas que corten a la recta $r: \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ y = z \end{cases}$ y a la recta $s: \begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \end{cases}$ y son paralelas a la recta $t: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-2}$.
Dibujar las rectas que contengan al punto P y corten a las rectas r y s. 	Dibujar las rectas que corten a las rectas r y s y sean paralelas a t. 

Aplikazioa

- Ikasmaterial teorikoak eta jarduerak eskola-orduetan landu ziren talde-lanaren bitartez
- Metodologiaren ebaluazioa ikasleei emandako inkesta baten bitartez egin zen eta irakaslegoaren pertzepzioaren bitartez

Inkesten emaitzak

- Ikaslearen %65ak lana positiboki baloratu zuten egindako lana
- Ikasleen %64ak bere autoikasketarako ahalmena hobetzeko balio zuela esan zuen
- Ikasleen %65ak bi irakasgaien arteko erlazioa hobeto ezagutzeko balio izan duela esan zuen
- Sortutako materialak oso onak bezala baloratu ziren
- %29ak bakarrik aplikatuko luke metodologia hau beste irakasgaietan

Ondorioak

- Adierazpen Grafikoa eta Aljebra irakasgaiek komuneko gaiak lantzen dituzte %20-25-ean. Disziplina-arteko ekintzak lantzea beharrezkoa ikusten dugu.
- Horrelako metodolgiek laguntzen dute kontzeptu berdina ikuspuntu desberdinetatik lantzea, eta honek, kontzeptu beraren ulermena hobetzen du
- Metodologia erabilgarria dela uste dugu orain arte isolaturik landu diren kontzeptuak ulertzeko
- Ikasleek interesa adierazi dute baina esfortzu handia suposatzen du beraien partetik, ohituta daudelako irakasgai estanko edo hermetikoetara.

Ondorioak

- Ezin da urtero aplikatu, gaiak lantzeko denbora gutxi dagoelako
- OpenCourseWare (OCW) ikastaro bihurtu dugu, edukiak modu irekian argitaratuz (aurten erdaraz, hurrengo urtean euskaraz).

Ondorioak

<https://ocw.ehu.eus/course/view.php?id=387>

OpenCourseWare
Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

English (en)

Home ► My courses ► Geometria Analítica y Descriptiva

Administration
► My profile settings

Esta obra se publica bajo una licencia [Creative Commons License](#).

CC BY NC SA

OCW2016_expediente 63 (mod.2)

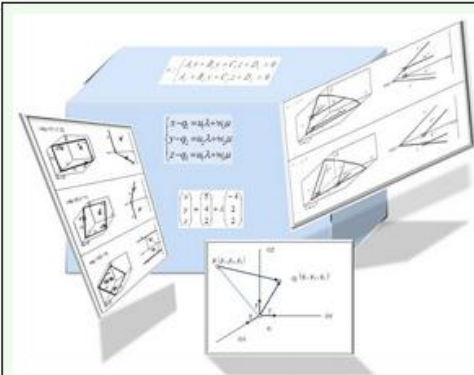


Imagen de las autoras

Geometría Analítica y Descriptiva

Autoras:

- Alberdi Celaya, Elisabete
- Álvarez González, Irantzu
- Eguia Ribero, M^a Isabel
- García López, M^a Jose
- Unzueta Inchaurre, Aitziber

UPV/EHU

Oharra: azal honetarako irudia Campus Birtualera helarazi behar diguzue. Aviso: Nos teneis que mandar una imagen para esta portada

Bibliografia

- [1] M. Castellet and I. Llerena. *Álgebra lineal y Geometría*. Editorial Reverte, 1991.
- [2] J. de Burgos. *Álgebra lineal y Geometría*. McGraw-Hill Interamericana, 2000.
- [3] M. J. Garcia and P. Etxeberria. *Sistemas de Representación*. Ejercicios resueltos paso a paso. Ed.UPV/EHU, 2007.
- [4] D. C. Lay. *Linear Algebra and Its Applications (3rd Edition)*. Addison Wesley, 2002.
- [5] G. Strang. *Engineering Mathematics II (Linear Algebra and its Applications)*. Massachusetts Institute of Technology, 2010.

Eskerrik asko zuen arretagatik

I. Alvarez, E. Alberdi, A. Unzueta, I. Eguia, M.J. García
Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)