Jose Miguel Campillo Robles

GAUGE PRINTZIPIOA

Izenburuan agertzen den “gauge” hitza, ingelesetik hartuta dago, eta beraren esangura “eskala” edo “neurketa-araua” da. Hain zuzen, horixe da gauge transformazioen atzean dagoena. Edozein sistema ikertzerakoan, magnitude batzutan zein eskala hartzea komeni zaigun erabakitzea da, preseski, kontutan hartu behar dena. Gauge hitza arrazoi historikoengatik erabiltzen da batez ere.

Lan honetan Elektromagnetikan erabiltzen diren gauge transformazioetaz baliatuz, gauge printzipioa aztertuko da. Hain zuzen, printzipio hau teoria fisikoen gauge transformazioekiko aldaezintasunaren printzipioa da. Gauge printzipioa bitxikeria matematikoa ez ezik, gaur eguneko Fisikan zerbait garrantzizkoa dela ikusiko da, Naturaren oinarrizko propietatea baita.

Gauge printzipioa hobeto ulertzeko, Elektromagnetikaren ikuspegi desberdinak ikusiko ditugu. Hola, Mekanika Analitikotik abiatuz, Elektromagnetikaren arloan partikulari dagozkion lagrangearra eta hamiltondarra aterako dira, eta hauek gauge transformazioekiko duten forma-aldaezintasuna frogatuko da. Gero formalismo hamiltondarra erabiliz, Mekanika Kuantikoaren munduan sartuko gara, eta fase-transformazioen eta gauge transformazioen artean dagoen erlazioa ikusiko da, gauge transformazioen definizio egokia emango delarik. Bestaldetik, Elektromagnetikan transformazio hauek erabilgarriak nola suertatzen diren ikusiko da. Horretarako, adibide batzuk jarriko dira, hala nola, Coulomb-en eta Lorentz-en gauge-ak. Bukatzeko, gauge teoriei buruz zenbait iruzkin egingo dira.

ELEKTROMAGNETIKAREN IKUSPEGIA

Hasteko, Elektromagnetikaren oinarrizko kontzeptuak gogoratzea komeni da. Horretarako, unitateen arazoari buruz hitz egiten hasiko gara.

Fisikaren formulazioa adierazteko, unitate-sistema desberdinak daude. Bigarren gerrate mundiala pasa eta gero, gehien erabiltzen zen sistema CGS izenekoa zen (gausstarra ere deitua). Sistema horretan abiadura zentimetro segundukotan (cm s^{-1}) ematen da, masa gramotan (g), indarra dinatan (g cm s^{-2}), eta energia erg-etan (g cm^2 s^{-2}). Beranduago MKS sistema edo sistema internazionala onartu zen akordio internazionalen bitartez, eta hauxe da gaur egun gehien erabiltzen dena (hain zuzen, lan honetan ekuazioak MKS sisteman adieraziko dira). MKS sisteman abiadura metro segundukotan (m. s^{-1}) adierazten da, masa kilogramotan (kg), indarra newton-etan (kg. m s^{-2}) eta energia joule-tan (kg m^2 s^{-2}). Beste aldetik, energia handiko Fisikan hutseko ekuazioak agertzen dira, eta orduan ekuazioen idazkera errazteko asmoz Heaviside-Lorentz-en sistema erabili ohi da, tartean hitzarmen bat dagoelarik.

Ondoren, Maxwell-ek aurkezturiko ekuazioak adieraziko ditugu, Elektrika eta Magnetika bateratzen dituztenak alegia. Maxwell-en ekuazioak bai CGS sisteman eta bai sistema internazionalean ere idatziko ditugu:

MAXWELL-EN EKUAZIOAK

	Sistema gausstarra	Sistema internazionala	
Gaussen legea	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$	(1)
Faraday-Lenz-en legea	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	(2)
Monopolo magnetikoen eza	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(3)
Ampère-Maxwell-en legea	$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j}$	(4)

(Hemendik aurrera sistema internazionala erabiliko da soilik)

Esan beharra dago, eremu elektrikoa, **E**, eta eremu magnetikoa, **B**, ez direla elkarrekiko independenteak, aipaturiko Maxwell-en ekuazioen bitartez lotuta baitaude. Gainera, (2) eta (3) ekuazioen adierazpen matematikoen ondorioz, eremuak **A** potentzial bektorearen eta ϕ potentzial eskalarraren bidez adieraz daitezke beti. Hurrengo ekuazioetan ageri da eremuen eta potentzialen arteko erlazioa:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{6}$$

Potentzial hauek sartuz, kalkuluak egiterakoan Elektromagnetikaren ekuazioak modu errazagoan agertzen dira. Edozertara, Elektromagnetikaren adierazpen matematikoetan trinkotasun handiagoa br daiteke. Horretarako, koordenatu espazialak eta denborala maila berean jarri behar dira, lau dimentsiotako espazioa osotuz. Horrela lortzen den formulazioari *formulazio kobariantea* deritzo.

Jakina da **E** eta **B** eremuak eman arren, ϕ eta **A** potentzialak ez daudela unibokoki definiturik. Eremuak ematean, potentzialen familia bat baino ez da definitzen. Hau da, eremu elektromagnetiko berbera adierazteko balio duten potentzial bektore eta eskalar guztiak elkarrekin erlazionaturik daude. Erlazioa hurrengo transformazioek ematen dute:

$$\phi'(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) - \frac{\partial \Lambda(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,, \tag{7}$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \nabla \Lambda(\mathbf{r},t)\,. \tag{8}$$

Transformazio hauei *gauge transformazioak* deritze. Geroxeago ikusiko dugunez, bi gauge transformazio-mota daude, haietariko bat (7) ekuazioek ematen dutelarik. Beste aldetik, gauge transformazioekiko aldaezintasunari, *gauge-aldaezintasuna* deritzo. Froga daitekeenez, eremu elektrikoa eta magnetikoa gauge-aldaezinak dira, eta honen ondorioz, Maxwell-en ekuazioak ere gauge-aldaezinak dira. Baina eremuak gauge-aldaezinak izan daitezen, (7) transformazioak aldi berean bi potentzialetan gertatu behar dira. Eremu elektromagnetikoa adierazteko potentzial eskalar eta potentzial bektorea aukeratzen direnean, *gauge aukera* egin dela esan ohi da.Horretarako, gauge transformazioei muga batzuk jartzen zaizkie, normalean $\nabla \cdot \mathbf{A}$ kantitatearen balioa finkatzen delarik.

Fisikaren aldetik, gauge transformazioak egiten direnean emaitza fisikoak aldatzen ez direla esan beharra dago. Horrela, sistemarekin lotuta, bi motatako kantitate fisikoak aurki daitezke, alde batetik “benetako kantitate fisikoak”, eta bestetik “kantitate ez-fisikoak”. Benetako kantitate fisikoak, ikertzen ari den sisteman edozein aldiunetan neur daitezke, eta, gainera, eremu elektromagnetikoa azaltzeko aukeratzen den gauge-aren menpekotasunik ez dute. Lorentz-en indarrak, adibidez, eremuen menpekotasuna du, eta ez potentzialena. Beraz, eremuak gauge aldaezinak direnez, Lorentz-en indarra benetako kantitate fisikoa da, eta neurgarria. Kantitate ez-fisikoen balioek aukeratutako gaugearen menpekotasuna dute. Horrela, kantitate ez-fisikoak beste kantitateak kalkulatzeko tresna bihurtzen dira. Potentzial bektorea eta eskalarra kantitate ez-fisikoen adibideak dira.

ELEKTROMAGNETIKAREN FORMULAZIO LAGRANGEARRA

Mekanika Analitikoan funtzio lagrangearra erabil daiteke edozein sistemaren higidura-ekuazioak ateratzeko. Atal honetan, eremu elektromagnetiko batean kokaturiko partikularen lagrangearra aterako dugu. Eta orduan ikusi ahal izango dugu, gauge transfomazioak egitean gertatzen dena.

Normalean, lagrangearra sistemaren indarrak kontserbakorrak direnean definitzen da, hau da, indar orokortuak honelaxe adieraz daitezkeenean:

$$Q_j = -\frac{\partial V(q_j,t)}{\partial q_j}\,, \qquad (j = 1,\ldots,n) \tag{8}$$

Kasu hauetan sistemaren lagrangearra era honetan adierazten da:

$$L(q_j,\dot{q}_j,t)=T(q_j,\dot{q}_j,t)-V(q_j,t)\,. \tag{9}$$

Baina higidura-ekuazioak lortzeko, indarren potentzialek ezin dute abiadura orokortuen menpekotasunik eduki, hau da, $V=V(q_j,t)$. Hau guztiau betez gero, Lagrange-ren formulazioa erabil daiteke higidura-ekuazioak ateratzeko. Horretarako, Lagrange-ren ekuazioak beharrezkoak dira, ondokoak alegia:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0\,,\ \ (j=1,\ldots,n) \tag{10}$$

Eremu elektromagnetikoaren indarra Lorentz-en indarra da, hurrengoa hain zuzen:

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B})\,. \tag{11}$$

Lorentz-en indarra ez da kontserbakorra (esangura hertsian), beraz, teorian Lagrange-ren formulazioa ezin daiteke erabil higidura-ekuazioak lortzeko. Hala eta guztiz ere, kontserbakorrak ez diren zenbait indarren kasuan Lagrange-ren ekuazioak erabil daitezke. Kasu horietan potentzialek, $U=U(q_j,\dot{q}_j,t)$ erakoek, ondoko baldintza bete

$$Q_j=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial U}{\partial q_j}\,,\qquad (j=1,\ldots,n) \tag{12}$$

non Q_j direlakoak indar orokortuak diren. Gainera, lagrangearra berdin adieraziko da

$$L(q_j,\dot{q}_j,t)=T(q_j,\dot{q}_j,t)-U(q_j,\dot{q}_j,t)\,. \tag{13}$$

Erabilitako potentzial hauei *potentzial orokortuak* deritze. Zorionez, Elektromagnetikan agertzen den indarra, Lorentz-en indarra alegia, mota honetako potentzial baten bidez adieraz daiteke.

Formulazio lagrangearra garatu ahal izateko, eragiketa batzuk eginez, Lorentz-en indarretik potentzial orokortua atera behar da. Lehenengo, Lorentz-en indarrean eremuak potentzial bektorearen eta eskalarraren bidez adierazi behar dira, horretarako (5) eta (6) ekuazioak erabiliko direlarik:

$$\mathbf{F}=q\left[\left(-\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)+\mathbf{v}\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\right]. \tag{14}$$

Ekuazio honetan ondoko aldaketa egin daiteke,

$$\left(\mathbf{v}\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\right)_x=\frac{\partial\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right)}{\partial x}-\frac{dA_x}{dt}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\,, \tag{15}$$

non x azpindizeak parentesiko bektorearen x osagaia dela adierazi nahi duen. Lorentz-en indarraren x osagaia kontutan hartuz eta ordezkapena eginez, hurrengo adierazpenera hel gaitezke:

$$F_x = q\left[-\frac{\partial(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})}{\partial x} - \frac{dA_x}{dt}\right]. \tag{16}$$

Hemen formularen azken osagaia aldatu behar dugu, era egokian jarriz. Horretarako hurrengo ordezkapena egitea komeni da:

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})}{\partial v_x}\right). \tag{17}$$

Gainera, jakina denez, potentzial eskalarrak ez dauka abiaduraren menpekotasunik. Beraz, (16) ekuazioan modu egokian sartzen bada, ez du eraginik sortuko eta simetria handiagoa lortuko da. Aipatutako ordezkapenak eta aldaketak eginez,

$$F_x = q\left[-\frac{\partial(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})}{\partial v_x}\right)\right]. \tag{18}$$

Azken ekuazio hau (12) ekuazioarekin konparatzen bada, azkar ikus daiteke potentzial orokortua zein den, hurrengoa hain zuzen:

$$U(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) = q(\phi(\mathbf{r},t) - \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t)). \tag{19}$$

Orain (13) ekuazioa erabiliz, oso erraz idatz daiteke q kargadun eta m masadun partikularen lagrangearra eremu elektromagnetiko batean:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - q\phi(\mathbf{r},t) + q\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\,. \tag{20}$$

Hemendik, (10) ekuazioak erabiliz, higidura-ekuazioa atera daiteke, ondokoa izango delarik:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}). \tag{21}$$

Bistakoa denez, eskuineko zatia Lorentz-en indarra da. Beraz, higidura-ekuazioa gauge-aldaezina da. Higidura-ekuazioak eta lagrangearra lotuta daudenez, lagrangearrak aldaezintasunen bat adieraziko duela suposatu behar dugu.

Bestalde, lagrangearra denborarekiko deribatu oso batez zehaztu gabe dagoela, gauza jakina da. Hori Hamilton-en printzipioaren ondorioa da. Aztertzen ari garen kasuan, honelaxe adieraz daiteke zehaztugabetasun hori,

$$L'(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) = L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) + q\frac{d\Lambda(\mathbf{r},t)}{dt}, \tag{22}$$

non $\Lambda = \Lambda(\mathbf{r},t)$delakoa bi aldiz deribagarria den edozein funtzio den. Kontutan hartu behar da, ezen Λ funtzioak ezin duela $\dot{\mathbf{r}}$ aldagaiaren menpekotasunik eduki. Horrela lortutako L' lagrangearrak higidura-ekuazio berberak emango ditu.

(20) adierazpenean azaltzen den lagrangearra (22)-an ordezkatzen bada, ondokoa lortuko da:

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - q\phi(\mathbf{r},t) + q\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + q\left[\nabla\Lambda(\mathbf{r},t)\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial\Lambda(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right]. \qquad (23)$$

Ikus daitekeenez, *L´* lagrangearrak ez dauka *L* lagrangearraren forma berbera. Hori lortzeko, berrantolaketa egin behar da ekuazioan, eta orduan

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - q\phi'(\mathbf{r},t) + q\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)\,, \qquad (24)$$

lortuko genuke, non ϕ' eta $\mathbf{A}'$ (7) transformazioen bidez, hau da, gauge transformazioen bidez emanda dauden. Beraz, lagrangearraren forma- aldaezintasuna mantentzeko, potentzialak horrelako eran zehaztu gabe egon behar dira (kontrako bidea ere froga daiteke, hau da, gauge transformazioak onarturik, lagrangearra deribatu oso batez zehaztu gabe egon behar dela). Hauxe da, hain zuzen ere, gauge printzipioak dioena: *«Lagrangearrak forma-aldaezintasuna erakusten du gauge transformazioekiko»*. Honelatan, ba, edozein gauge aukeratu arren, higidura-ekuazioak berberak izango dira. Baina lagrangearra gauge-aldaezina ez dela kontutan hartu behar da, nahiz eta berak emandako ekuazioak aldaezinak izan. Hauxe gertatzen da potentzialen bidez adierazi behar delako. Horregatik, deribatu osoaren gehiketari lagrangearraren gauge transformazioa deritzo batzutan. Gainera, *L* eta *L´* lagrangearrak gauge-baliokideak direla esan ohi da. Era honetan, une bakoitzean komeni zaigun lagrangearra erabil dezakegu, aukerarako askatasun honetaz baliatuz.

ELEKTROMAGNETIKAREN FORMULAZIO HAMILTONDARRA

Mekanika Analitikoan badago beste bide bat higidura-ekuazioak ateratzeko. Bide hori Hamilton-en formulazioa erabiltzea da, eta horretarako funtzio hamiltondarra beharrezkoa da. Hamiltondarra ateratzeko, (20) ekuazioko lagrangearra erabil daiteke. Hortik r aldagaiaren momentu konjokatua atera daiteke, hurrengoa hain zuzen:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}\,. \qquad (25)$$

Ikus daitekeenez, momentu konjokatua ez da momentu lineala edo mekanikoa. Elektromagnetikan kontu handiz ibili behar da honekin. Gainera, momentu kanonikoa ez da gauge-aldaezina.

Behin momentu kanonikoa lortuta, hamiltondarra lortzeko, Legendre-ren transformazio bat baino ez da egin behar, honako hau alegia:

$$H(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r},\mathbf{p},t) - L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r},\mathbf{p},t),t)\,. \qquad (26)$$

Gero, (25) ekuazioan abiadura askatuz eta (26) adierazpenean ordezkatuz, ondoko emaitza lor daiteke:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi . \tag{27}$$

Behin hamiltondarra edukita, higidura-ekuazioak ateratzea oso erraza da. Hain zuzen, Hamilton-en ekuazio kanonikoak erabiltzea baino ez dago, hots,

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} , \tag{28a}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} . \tag{28b}$$

Higidura-ekuazioa, lagrangearraren bidez lortutakoen berbera da, (21) adierazpenekoa alegia.

Ikus daitekeenez, higidura-ekuazioa gauge-aldaezina da, eremuen bidez adierazita baitago. Berriz, gauge transformazioa hamiltondarrean egiten bada, forma-aldaezintasuna adierazten du soilik. Baina beraren balioa ez da gauge-aldaezina, gauge-aukeraren menpe baitago. Hori frogatzeko, transformaturiko lagrangearraz —L' delakoaz— baliatuz, transformaturiko hamiltondarra erabili behar da, hurrengoa hain zuzen,

$$H' = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}' - q\mathbf{A}')^2 + q\phi' . \tag{29}$$

non $\mathbf{p}'$ momentu kanoniko transformatua den, alegia,

$$\mathbf{p}' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}' . \tag{30}$$

Honela forma-aldaezintasuna hamiltondarraren kasuan ere mantentzen da.

Hamilton-en formalismoan aldagai dinamikoen balioek edozein aldiunetan aukeratutako gauge-aren menpekotasuna dute. Beraz, sistemaren ibilbideak fase-espazioan desberdinak izango dira, aukeraturiko gauge-aren arabera. Berriz, konfigurazio-espazioan —hau da, Lagrange-ren formalismoan erabiltzen den espazioan— sistemaren ibilbideak gauge-aldaezinak dira, $\mathbf{r}$ aldagaiak preseski konfigurazio-espazioa osotzen dutenak gauge-aldaezinak baitira.

Bi hamiltondar gauge-baliokideak modu honetan lot daitezke:

$$H'(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - q\frac{\partial \Lambda(\mathbf{r}, t)}{\partial t} . \tag{31}$$

Ikus daitekeenez, Elektromagnetikako kasu orokorrean hamiltondarrak ezin du azaldu sistemaren energia, ondoko baldintza betetzen ez delako, hots,

$$\frac{\partial H(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial t} = 0\,. \tag{32}$$

Hamiltondarrak energia adierazteko eremu elektromagnetikoak ez du denboraren menpekotasunik eduki behar, hau da, estatikoa izan behar du.

ELEKTROMAGNETIKA KUANTIKOA

Hurrengo urratsa mundu kuantikoan sartzea izango da. Atal honetan ikusiko dugunez, Mekanika Kuantikoaren formulazioa gauge-aldaezina da. Hori frogatzeko, beharrezkoa suertatzen zaigu formulazio hamiltondarra erabiltzea. Funtzio hamiltondarra sistemaren eboluzio denboralaren sortzailea da, eta orduan, sistemaren dinamika zuzentzen duen ekuazioa beraren bidez azaldu behar da. Mekanika Kuantikoan ekuazio horri Schrödinger-en ekuazioa deritzo, eta erabilgarria izateko, lehendabizi kuantizazio-arauak aplikatu behar dira. Kuantizazio-arauak aldagai dinamiko klasikoetatik eragile kuantikoetara pasatzeko balio zaizkigu, eta hurrengoak dira:

$$\mathbf{r}_{klas} \rightarrow \mathbf{r}_{kuan} \tag{33}$$

$$\mathbf{p}_{klas} \rightarrow -i\hbar\nabla \tag{34}$$

Beraz, kuantizazio-arau hauek erabiliz, Schrödinger-en ekuazioa ondokoa izango da:

$$H_{kuan}\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,, \tag{35}$$

non $\psi(\mathbf{r},t)$ funtzioa uhin-funtzioa den, eta sistema baten (edo sistema bereko multzo infinitu baten?) egoera definitzen duen. Orduan, (27) ekuazioan agertzen den hamiltondarra erabiliz, ondokoa lor daiteke:

$$\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)^2 + q\phi(\mathbf{r},t)\right]\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,. \tag{36}$$

Schrödinger-en ekuazioa gauge transformazioekiko aldaezintasuna mantentzeko, ψ' uhin-funtzioa lortu behar dugu, zeinak hurrengo ekuazioa beteko duen:

$$\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)\right)^2 + q\phi'(\mathbf{r},t)\right]\psi'(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi'(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,. \tag{37}$$

Hau da, uhin-funtzioan ere gertatu behar da transformazio bat, gauge transformazioak potentzialetan gertatzen direnean. Uhin-funtzioan gertatzen diren transformazioei, lehen motako gauge transformazioak deritze; berriz, potentzialetan gertatzen direnei, bigarren motako gauge transformazioak. Bi motetako gauge transformazioen arteko erlazioa 1927. urtean frogatu zuen Fock-ek. Lehen motako gauge transformazioen adierazpen matematikoa, ondokoa da,

$$\psi'(\mathbf{r},t) = \exp\left(\frac{iq\Lambda}{\hbar}\right)\psi(\mathbf{r},t)\,, \tag{38}$$

eta, Λ funtzioaren arabera, bi motatakoak izan daitezke. Λ funtzioa konstantea bada, orduan transformazio orokorrak izango dira, hau da, espazio-denbora osoan transformazioa berbera izango da. Beste aldetik, Λ funtzioa $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ erakoa bada, orduan transformazio lokalak izango dira, espazio-denborako puntutik puntura aldatzen direlako.

Jakina denez, Mekanika Kuantikoa —eta orokorrean, Fisika guztia— fase-transformazio orokorrekiko aldaezina da. Uhin-funtzioaren fase absolutua ezin da neurtu, soilik fase erlatiboak neur daitezke, interferentzien experimentuen bidez. Hau guztiau oso erraz azal daiteke kantitate fisikoak kalkulatzerakoan $\psi^*\psi$ motako biderkadurak erabiltzen baititugu, eta biderkadura hauetan fase-aldaketa orokorra desagertu egiten da. Hau da, fase-aldaketa erlatiboak soilik hartu behar dira kontutan. Beste aldetik, fase-transformazio lokalekiko aldaezintasunak bere ondorioak dauzka, geroxeago ikusiko denez.

IRUZKINAK

(A)

Aurretik aipatu den bezala, gauge transformazioak kalkuluak errazteko asmoz erabiltzen dira. Horretarako, une bakoitzean potentzialak interesatzen zaigun eran jartzen ditugu. Gaugea zehazteko, normalean $\nabla \cdot \mathbf{A}$-ren balioa finkatzen da. Gehien erabiltzen diren gauge aukerak, jarraian aipatuko ditugu:

1.- **Lorentz-en gaugea.** Gauge honetan potentzialek Lorentz-en baldintza betetzen dute, hurrengoa alegia,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{r},t) = 0 . \tag{I-1}$$

Maxwell-en ekuazioak hartuz eta eragiketa batzuk eginez, hurrengo uhin-ekuazio ez-homogenoak lor daitezke:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} , \tag{I-2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2} . \tag{I-3}$$

Hiru ekuazio hauek eta Maxwell-en ekuazioak baliokideak dira. Beste aldetik, gauge hau kobariantea da, hots, hiru ekuazioen forma Lorentz-en transformazioekiko aldaezina da. Horrexegatik, Erlatibitate Bereziarekin batera erabil daitezke. Gauge aukera hau oso erabilgarria da atzeraturiko potentzialak aztertzeko, hau da, uhin-ekuazioa iturriekin kontutan hartzen denean.

2.- Coulomb-en gaugea (erradioazioarena edo transbertsala). Gauge aukera honetan ondoko baldintza ezartzen da:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0 . \tag{I-4}$$

Gauge hau ez da kobariantea. Beraz, ekuazioen forma-aldaezintasuna Lorentz-en transformazioekiko ez da mantentzen. Eremuen iturriak ez daudenean erabili ohi da. Orduan $\phi = 0$ da eta

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{eta} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \tag{I-5}$$

Elektromagnetika Kuantikoan ere oso erabilgarria da.

(B)

Lan honetan indar elektromagnetikoa ezaguntzat jo dugu beti. Baina,... ezaguna ez bagenu?

Demagun q kargadun partikularen Schrödinger-en ekuazioa jarri dugula eta eremu elektromagnetikoari buruz ezer ez dakigula, hau da,

$$\frac{(-i\hbar\nabla)^2}{2m}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\,. \tag{I-6}$$

Ekuazio honetan (38) ekuazioan agertzen den fase-transformazio lokala aplikatzen badugu, ondokoa lor daiteke:

$$\left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - q\nabla\Lambda)^2 - q\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right]\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}\,. \tag{I-7}$$

Ikus daitekeenez, Schrödinger-en ekuazioaren forma erabat aldatu da. Gauge transformazioek sistemaren fisika ez dutela aldatzen suposatzen badugu, ekuazio honen formak ez du zertan aldatu beharrik. Beraz, (I-6) ekuazioa txarto egon behar da eta ϕ eta **A** potentzialak sartu behar dira. Horrela, dinamikaren ekuazioaren forma-aldaezintasuna bermatzeko, ϕ eta **A** potentzialak sartu behar dira. Horrexegatik, **E** eta **B** eremuei *konpentsaziozko eremuak* deritze. Honelatan, bada, teoria fisikoak fase-transformazioekiko aldaezinak izan daitezen, indar elektromagnetikoa sortzen da. Era honetan lortutako eremuei *gauge eremuak* deritze.

Gaur egun Naturan ezagutzen diren oinarrizko lau elkarrekintza-motak era honetakoak direla dio fisikari askok. Hau da, gauge-aldaezintasunaren printzipioa naturan dauden eremu guztien oinarria dela uste dute. Horrexegatik, simetria eta beste propietateak erabiliz, elkarrekintzen arteko bateratzea lortu nahi da gauge teorien bidez —hain famatuak diren Bateraketa Handiko Teoriak (BHT) edota ingelesez, Great Unification Theories (GUT) izenekoak preseski—. Momentuz, elkarrekintza ahula eta elektromagnetikoa batu dira arrakasta handiz, eta, dirudienez, elkarrekintza bortitza ere bai. Ikerketak aurrera doaz.

Iruñean, 1994.eko uztailaren 26an

Udako Euskal Unibertsitatea, XXII. Udako Ikastaroak

BIBLIOGRAFIA

- J. M. AGIRREGABIRIA, J. R. ETXEBARRIA, *Mekanika Analitikoa,* UEU, Iruñea, 1988.

- 1.J.R. AITCHISON & A.J.G. HEY, *Gauge Theories in Particle Physics*, Adam Hilger Ltd, Bristol, 1984.

- C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU, F. LALOE, *Quantum Mechanics,* John Wiley and Sons, Paris, 1977.

- H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics,* Addison-Wesley, Reading, MA, 1950.

- J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics,* 2nd ed,Wiley, New York, 1975.

- D. H. KOBE, *"Derivation of Maxwell's equations from the local gauge invariance of quantum mechanics"*, Am. J. Phys. **46** (4), Apr 1978.

- D. H. KOBE, *"Derivation of Maxwell's equations from the gauge invariance of classical mechanics"*, Am. J. Phys. **48** (5), May 1980.

- D. H. KOBE, *"Gauge-invariant classical Hamiltonian formulation of the electrodynamics of nonrelativistic particles"*, Am. J. Phys. **49** (6), June 1981.

- D. H. KOBE, *"Gauge transformations in classical mechanics as canonical transformations"*, Am. J. Phys. **56** (3), March 1988.

- S. WEINBERG, *"The future of unified gauge theories"*, Phys. Today **30,** 42, Apr 1977.13