

Bortizitate harizpiaren ekuazioaren eboluzioa hasierako datu izkinadunetarako

Patxi de la Hoz Méndez

Matematika Aplikatua eta Estatistika eta Ikerkuntza Operatiboa Saila
Euskal Herriko Unibertsitatea

Udako Euskal Unibertsitatea

Matematikari Euskaldunen II. Topaketak
Eibar, 2016ko uztailaren 1a

Bortizitate harizpiaren ekuazioa

Hitzaldi honetan bortizitate harizpiaren ekuazioa (VFE) kontsideratuko dugu:

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_s \wedge \mathbf{X}_{ss},$$

s arku luzeraren parametroa eta $\wedge$ ohiko biderkadura gurutzatua izanda. Ekuazio hau **binormalaren fluxu**aren baliokidea da,

$$\mathbf{X}_t = \kappa \mathbf{b},$$

κ kurbatura eta $\mathbf{b}$ bektore binormala izanda. $\|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{X}_s\|$ konstantea denez, $\mathbf{T} \in \mathbb{S}^2$ dela onartzen dugu. VFE diferentziatuz, **esferaren gaineko Schrödingerren aplikazioa** lortzen dugu:

$$\mathbf{T}_t = \mathbf{T} \wedge \mathbf{T}_{ss}.$$

Gure helburua VFE ulertzea da, hasierako datu izkinadunak hartuz.

Hasierako datuak izkina bakarra dauka (Gutiérrez, Rivas & Vega)

$\mathbf{A}^\pm(\kappa_0) = (A_1^\pm, A_2^\pm, A_3^\pm)^T \in \mathbb{S}^2$ emanda, kontsidera dezagun

$$\begin{cases} \mathbf{X}_t = \mathbf{X}_s \wedge \mathbf{X}_{ss}, & t > 0, \quad s \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{X}(s, 0) = \mathbf{A}^+ s \chi_{[0, +\infty)}(s) - \mathbf{A}^- s \chi_{(-\infty, 0]}(s), \end{cases}$$

χ funtzio karakteristikoa izanda. **Autoantzekotasuna** erabiliko dugu:

$$\mathbf{X}(s, t) \text{ soluzioa} \implies \lambda^{-1} \mathbf{X}(\lambda s, \lambda^2 t) \text{ soluzioa.}$$

$\lambda = t^{-1/2}$ hartuz eta $\mathbf{G}(s) = \mathbf{X}(s, 1)$ definituz:

$$\mathbf{X}(s, t) = t^{1/2} \mathbf{X}(t^{-1/2} s, 1) = \sqrt{t} \mathbf{G}(s/\sqrt{t}).$$

Beraz, honela definituta dagoen soluzio familia bat daukagu:

$$\mathbf{X}_{\kappa_0}(s, t) = \sqrt{t} \mathbf{G}(s/\sqrt{t}),$$

non $\mathbf{G}'(s) = \mathbf{T}(s, 1)$ -ek honakoa betetzen baitu:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_0 & 0 \\ -\kappa_0 & 0 & \frac{s}{2} \\ 0 & -\frac{s}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

hasierako baldintzak honakoak izanda:

$$\begin{cases} \mathbf{G}(0) = 2\kappa_0(0, 1, 0)^T, \\ \mathbf{T}(0) = (0, 0, 1)^T, \\ \mathbf{n}(0) = (1, 0, 0)^T, \\ \mathbf{b}(0) = (0, 1, 0)^T. \end{cases}$$

κ_0 soluzio familiaren parametroa da. $\kappa_0 = 0$ denean:

$$\mathbf{X}_0(s, t) = s(0, 0, 1)^T.$$

Orduan, edozein $t > 0$ denboratarako:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\kappa_0}{\sqrt{t}} & 0 \\ -\frac{\kappa_0}{\sqrt{t}} & 0 & \frac{s}{2t} \\ 0 & -\frac{s}{2t} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

edo, baliokideki,

$$\kappa(s, t) = \frac{\kappa_0}{\sqrt{t}}, \quad \tau(s, t) = \frac{s}{2t}.$$

Teorema (Gutiérrez, Rivas & Vega)

$\kappa_0 \geq 0$ emanda, $\mathbf{X}_{\kappa_0}$ binormalaren fluxuaren C^∞ soluzioa da, $\forall t > 0$.

Gainera, $\mathbf{A}^\pm(\kappa_0) = (A_1^\pm, A_2^\pm, A_3^\pm) \in \mathbb{S}^2$, $\mathbf{B}^\pm(\kappa_0)$ existitzen dira, halako moldeak non

$$(i) \quad |\mathbf{X}_{\kappa_0}(s, t) - \mathbf{A}^+ s(\kappa_0) \chi_{[0, +\infty)}(s) - \mathbf{A}^- s(\kappa_0) \chi_{(-\infty, 0]}(s)| \leq \kappa_0 \sqrt{t}.$$

(ii) Honako garapen asintotikoak dauzkagu:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}^\pm(\kappa_0) \left(s + 2 \frac{\kappa_0^2}{s} \right) - 4\kappa_0 \frac{\mathbf{n}}{s^2} + \mathcal{O}(1/s^3), \quad s \rightarrow \pm\infty;$$

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{A}^\pm(\kappa_0) - 2\kappa_0 \frac{\mathbf{b}}{s} + \mathcal{O}(1/s^2), \quad s \rightarrow \pm\infty;$$

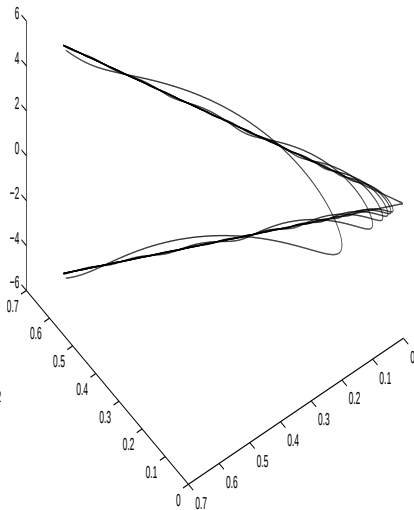
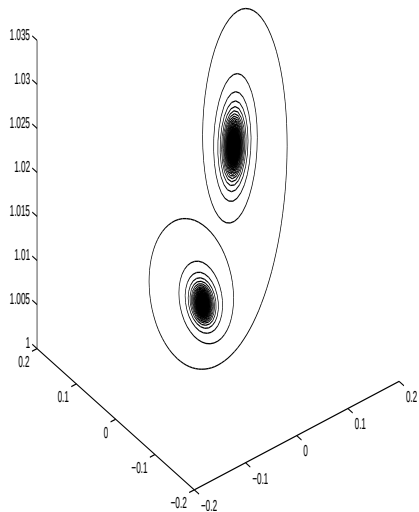
$$(\mathbf{n} - i\mathbf{b}) = \mathbf{B}^\pm(\kappa_0) e^{is^2/4} e^{i\kappa_0^2 \log |s|} + \mathcal{O}(1/s), \quad s \rightarrow \pm\infty.$$

$$(iii) \quad A_1^+ = A_1^- = e^{-(\kappa_0^2/2)\pi}, \quad A_2^+ = -A_2^-, \quad A_3^+ = -A_3^-, \quad \mathbf{A}^\pm \cdot \mathbf{B}^\pm = 0.$$

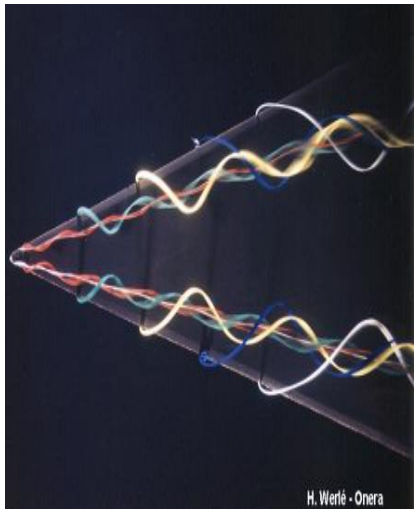
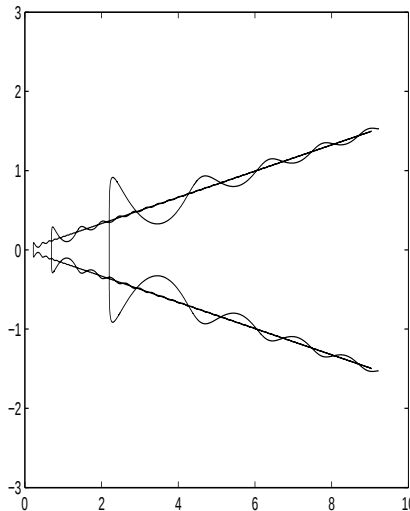
Bestaldetik, $\mathbf{X}$ eta $\mathbf{T}$ denboran atzeragarriak direnez,

$$\begin{cases} \mathbf{X}_t = \mathbf{X}_s \wedge \mathbf{X}_{ss}, & t > 0, \quad s \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{X}(s, 0) = \mathbf{A}^+ s \chi_{[0, +\infty)}(s) - \mathbf{A}^- s \chi_{(-\infty, 0]}(s) \end{cases}$$

ere ebatz dezakegu.



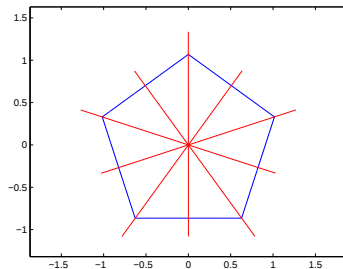
Irudia: Ezkerra: $T(s, t)$, $\forall t > 0$. Eskuina: $X(s, t)$, hainbat t -tarako.



Irudia: Ezkerra: $\mathbf{X}(s, t)$, hainbat t -tarako. Eskuina: delta hegal baten gaineko bortizeak (ONERA photograph, Werlé 1963).

Poligono erregularrak diren hasierako datuak (De la Hoz & Vega)

Behin izkina bakarreko kasua kontsideratuta, M aldeko poligono erregular baten kasua ulertu nahi dugu:



Luzera osoa 2π da. Bertizeak honakoak dira

$$\mathbf{X}(s_k, 0) = \frac{-i\pi e^{i\pi(2k-1)/M}}{M \sin(\pi/M)}, \quad k = 0, \dots, M-1,$$

eta bektore ukitzalea honakoa da:

$$\mathbf{T}(s, 0) = e^{2\pi i k / M}, \quad \text{for } s_k < s < s_{k+1}.$$

Hasimotoren transformazioa eta inbariantza galilearra

Frenet-Serreten formulen **adierazpen alternatibo** bat erabiliko dugu:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}.$$

Orduan, **Hasimotoren transformazioa** $\psi \equiv \alpha + i\beta$ da eta $\mathbf{T}_t = \mathbf{T} \wedge \mathbf{T}_{ss}$ ekuaziotik Schrödingerren ekuazio ez-linealera garamatza:

$$\psi_t = i\psi_{ss} + i\left(\frac{1}{2}(|\psi|^2 + A(t))\right)\psi.$$

Horrek honako **galilear inbariantza** dauka: ψ soluzioa bada, $\tilde{\psi}$ ere bada:

$$\tilde{\psi}_k(s, t) \equiv e^{iks - ik^2 t} \psi(s - 2kt, t), \quad \forall k, t \in \mathbb{R}.$$

Har dezagun $\psi(s, 0)$, non $\tilde{\psi}_k(s, 0) = \psi(s, 0)$ baita, $\forall k \in \mathbb{R}$, orduan

$$\psi(s, t) = e^{iks - ik^2 t} \psi(s - 2kt, t), \quad \forall k, t \in \mathbb{R}.$$

Bakartasuna suposatzen ari gara!

Gure poligono erregularren kasuan:

$$\kappa(s) \equiv \psi(s, 0) = \frac{2\pi}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(s - \frac{2\pi k}{M}).$$

$t = t_{pq} = (2\pi/M^2)(p/q)$ puntuan ebaluatuz, honakoa froga daiteke:

$$\psi(s, t_{pq}) = \frac{2\pi}{Mq} \hat{\psi}(0, t_{pq}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{q-1} G(-p, m, q) \delta(s - \frac{2\pi k}{M} - \frac{2\pi m}{Mq}),$$

non $G(a, b, c) = \sum_{l=0}^{c-1} e^{2\pi i(al^2+bl)/c}$ **Gaußen batura koadratiko orokortua** baita. Propietate garrantzitsu bat:

$$|G(-p, m, q)| = \begin{cases} \sqrt{q}, & q \text{ bakoitia bada,} \\ \sqrt{2q}, & q \text{ bikoitia eta } q/2 \equiv m \pmod{2} \text{ badira,} \\ 0, & q \text{ bikoitia eta } q/2 \not\equiv m \pmod{2} \text{ badira.} \end{cases}$$

Gainera, Gaußen batura koadratiko orokortuek **zorizkotasun** propietate nabarmenak erakusten dituzte.

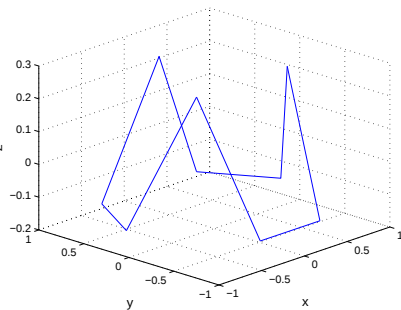
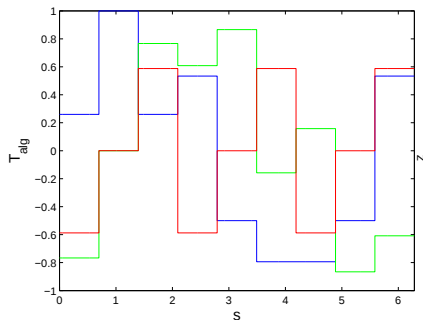
$\psi(s, t)$ eta $\mathbf{T}(s, t)$ **t -n periodikoak** dira, $2\pi/M^2$ periodoarekin. $\mathbf{X}(s, t)$ ere periodikoa da, goranzko abiadura konstante batengatik izan ezik. $t = t_{pq}$ denboran:

- $\mathbf{X}(s, t_{pq})$ **poligono abaildua** da, Mq aldekoa (q bakoitia) edo $Mq/2$ aldekoa (q bikoitia).
- Bi alde albokideren arteko ρ angelua konstantea da:

$$\cos(\rho) = \begin{cases} 2 \cos^{2/q}(\frac{\pi}{M}) - 1, & q \text{ bakoitia bada,} \\ 2 \cos^{4/q}(\frac{\pi}{M}) - 1, & q \text{ bikoitia bada.} \end{cases}$$

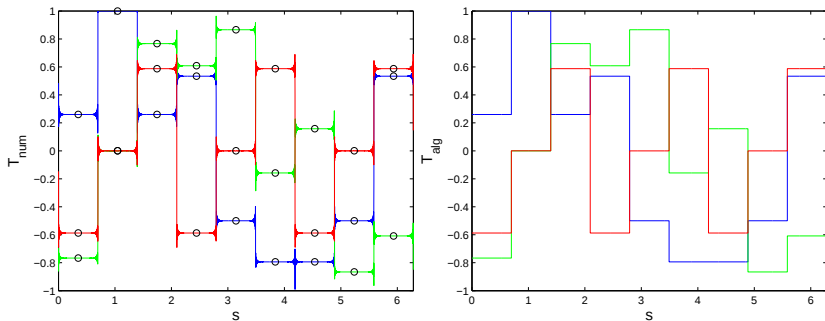
- Gaußen baturak determinatzen du poligonoaren egitura.
- $\hat{\psi}(0, t_{pq})$ modu egokian aukeratu behar da, poligonoa itxita egoteko:

$$\hat{\psi}(0, t_{pq}) = \begin{cases} \frac{M\sqrt{q}}{2\pi} \arccos \left(2 \cos^{2/q}(\frac{\pi}{M}) - 1 \right), & q \text{ bakoitia bada,} \\ \frac{M\sqrt{q/2}}{2\pi} \arccos \left(2 \cos^{4/q}(\frac{\pi}{M}) - 1 \right), & q \text{ bikoitia bada.} \end{cases}$$



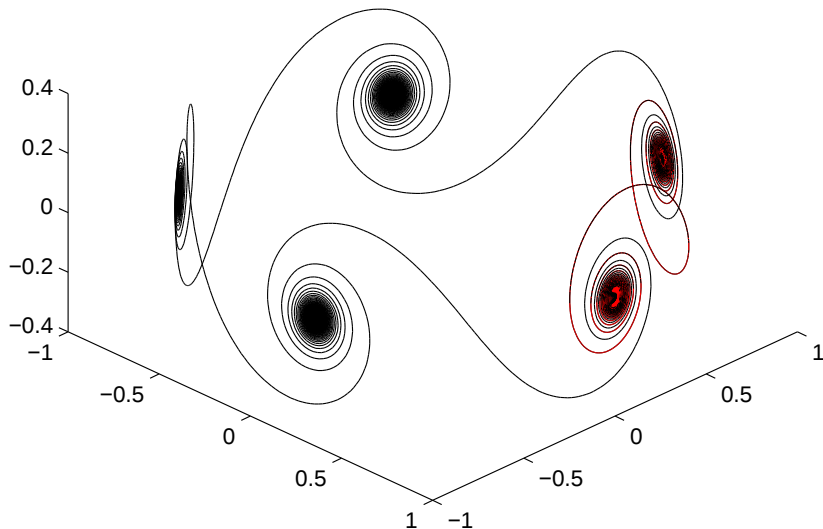
Irudia: Aljebraikoki eraikitako $\mathbf{T}$ (ezkerra) eta $\mathbf{X}$ (eskuina), $M = 3$, $t_{1,3} = \frac{2\pi}{27}$ izanda. $\mathbf{T} \equiv (T_1, T_2, T_3)$. T_1 urdinez, T_2 berdez eta T_3 gorriz agertzen dira.

Eraikuntza algebraikoaren eta zenbakizko eboluzioaren arteko konparazioa



Irudia: Ezkerra: **T**-ren zenbakizko eboluzioa, $N/M = 8192$ hartuz. **Gibbsen fenomenoa** ikusten da. Eskuina: aljebraikoki eraikitako T . Zirkuluetako errorerik handiena $3.3976 \cdot 10^{-10}$ da.

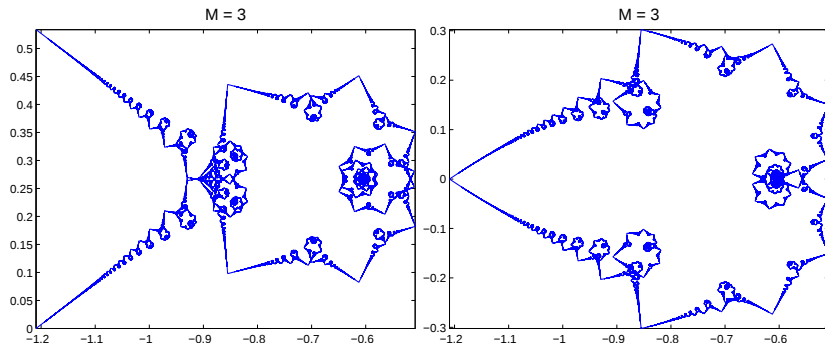
Izkina bakarreko eta N izkineko kasuen arteko erlazioa



Irudia: Beltzez: aljebraikoki lortutako T_{alg} , $M = 5$, $t_{pq} = \frac{2\pi}{5^2} \cdot \frac{1}{10^4}$ izanda. Gorriz: izkina bakarreko kasua, behin parametroak doiturik, $t = 1$ -en.

Fraktaltasun fenomenoak

Oso interesgarria da $\mathbf{X}(0, t)$ -ren eboluzioa aztertzea:

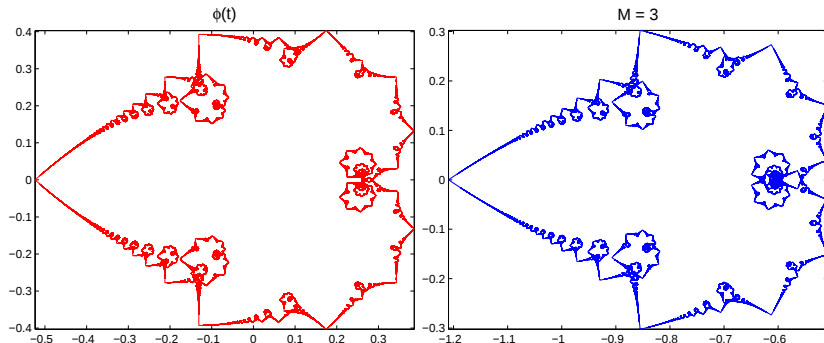


Irudia: Ezkerra: izkina baten eboluzioa. Eskuina: izkina baten eboluzioa, behin goranzko abiadura kenduta.

Aurreko irudia, behin eskalaturik, ϕ -rekiko antz handia dauka:

$$\phi(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i k^2 t}}{\pi k^2}, \quad t \in [0, 1],$$

non ϕ -ren parte irudikaria **Riemannen funtzio ez-diferentziagarria** baita. Horrek iradokitzen du $\mathbf{X}(0, t)$ **multifraktala** dela.



Irudia: Ezkerra: $\phi(t)$. Eskuina: izkina baten eboluzioa, behin goranzko abiadura kenduta.

Eskerrik asko zuen arretagatik!